Devoir surveillé 8

▸ Exercice 1 : étude d'une fonction définie par une intégrale.

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $t + \sin t > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin t}$.

2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et déterminer sa dérivée.
3. **Étude de la limite de f en $+\infty$**
   a. Montrer que pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}$.
   b. Prouver qu'il existe un réel $m > 0$ tel que $\forall t \geqslant m$, $t + \sin t \geqslant \dfrac{t}{2}$.
   c. En déduire qu'il existe un réel ℓ que l'on déterminera tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
4. **Étude de f au voisinage de 0.**
   a. Justifier qu'il existe un réel $a \in \mathbf{R}$ et une fonction $\varepsilon :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ telle que $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ et
   $$\forall t > 0, \ \frac{1}{t + \sin t} = \frac{a}{t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}.$$
   b. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\ln(2)}{2}$.
   c. On note $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f à $[0, +\infty[$. Justifier que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

▸ Exercice 2 : probabilités

On effectue une suite de tirages dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge. À l'issue de chaque tirage on remet dans l'urne la boule que l'on vient de tirer et on rajoute une boule blanche si bien que lors du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient une boule rouge et n boules blanches.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note A_n l'événement : «lors des n premiers tirages, on n'a jamais obtenu deux fois consécutivement la boule rouge».
On note également B_n l'événement «on a obtenu une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage», et on note $R_n = \overline{B_n}$.
Enfin, on note pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_n = \mathbf{P}(A_n \cap B_n)$ et $q_n = \mathbf{P}(A_n)$.

1. Calculer p_1, q_1 et p_2, q_2.
2. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant q_n \leqslant \dfrac{5}{6}$.
3. Soit $n \geqslant 2$. Comparer les événements $A_n \cap B_n$ et $A_{n-1} \cap B_n$.
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $p_n = q_{n-1} \frac{n}{n+1}$.
5. Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $q_n = p_n + \dfrac{1}{n+1} p_{n-1}$.
6. Montrer alors que pour tout $n \geqslant 2$, $p_{n+1} - p_n = -\dfrac{1}{n+2}(p_n - p_{n-1})$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$.
8. Montrer que la suite $(q_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel que l'on précisera.

▸ Problème : racines carrées de matrices

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on appelle racine carrée de A toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = A$.
On note alors $\mathbf{Rac}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid M^2 = A\}$ l'ensemble des racines carrées de A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et soit $M \in \mathbf{Rac}(A)$. Montrer que A et M commutent.

Partie I. Étude de deux exemples dans le cas $n = 3$.

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note également f et g les endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associés aux matrices A et N.

2. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(N)$ avec le moins de calculs possibles.
3. Les matrices A et N sont-elles semblables ? Sont-elles équivalentes ?
4. Dans cette question, on note $u_1 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (2, -1, 1)$.
   a. Montrer avec le moins de calculs possibles que $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = 1$, et déterminer deux réels x et y tels que $u_2 = (x, y, 1)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$.
   b. Montrer que $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   c. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, calculer $f(u_i)$.
   d. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(0, 1, 16)$, et donner une telle matrice P.
5. Dans cette question, on note $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que $\mathscr{C}(D) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \mid MD = DM\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de dimension 3, et en donner une base.
   b. En utilisant la question 1, déterminer $\mathbf{Rac}(D)$.
6. a. On note encore P la matrice de la question 4.d. Montrer que $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array} \right.$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
   b. Prouver que $\Phi(\mathbf{Rac}(D)) = \mathbf{Rac}(A)$.
   c. En déduire alors le nombre de racines carrées de A.
7. Le but de cette question est de prouver que $\mathbf{Rac}(N) = \emptyset$.
   Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $M \in \mathbf{Rac}(N)$, et on note alors h l'endomorphisme canoniquement associé à M.
   a. Montrer que $\mathrm{rg}(h) = 2$.
   b. En déduire que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h)$, puis que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{Im}(h^k) = \mathrm{Im}(h)$.
   c. Calculer N^3, et aboutir à une contradiction.

Partie II. Racines carrées d'une matrice tridiagonale

Dans tout cette partie, on fixe $n \geqslant 3$ et on note

$$A_n = \begin{pmatrix} n & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -n & n & -2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -n+1 & n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n & -n+1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -2 & n & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$$

On note également $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P' + n(1-X)P \end{array} \right.$. *On admettra que φ est linéaire.*

Enfin, pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $P_k = (X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

8. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
9. Montrer soigneusement que la matrice de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}_n[X]$ est A_n.
10. Prouver que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_k) = (2n-2k)P_k$.
11. Justifier que $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ et que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$ est diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.
12. En déduire, à l'aide de méthodes matricielles que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{Ker}\left(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}\right)$ est de dimension 1, puis que $\operatorname{Ker}\left(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}\right) = \operatorname{Vect}(P_k)$.
13. Soit $B \in \mathbf{Rac}(A_n)$, et soit g l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique est B.
    a. Justifier g et φ commutent.
    b. Prouver que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{Ker}\left(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}\right)$ est stable par g, puis qu'il existe $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tel que $g(P_k) = \lambda_k P_k$. Que vaut alors λ_k^2 ?
    c. Prouver enfin que la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$ est de la forme $\operatorname{Diag}\left(\varepsilon_0\sqrt{2n}, \varepsilon_1\sqrt{2n-2}, \ldots, \varepsilon_{n-1}\sqrt{2}, 0\right)$, avec $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \{-1, 1\}^n$.
14. Prouver enfin que $\mathbf{Rac}(A_n)$ est de cardinal 2^n.

Partie III. Racines carrées de I_n

Dans cette partie, $n \geqslant 2$.

15. Comment appelle-t-on un endomorphisme $s \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ tel que $s^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$?
16. En déduire que $\mathbf{Rac}(I_n)$ est infini.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 8

▸ Exercice 1 : une fonction définie par une intégrale (extrait du concours Mines de Sup 1998)

1. Il est évident que si $x > 1$, $-\sin(x) \leqslant 1 < x$, et donc $x + \sin(x) > 0$.
Sur $]0,1]$, la fonction $g : x \mapsto x + \sin(x)$ est dérivable, avec $g' : x \mapsto 1 + \cos(x) > 0$.
Donc g est strictement croissante, et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, pour tout $x \in]0,1]$, $x + \sin(x) = g(x) > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+^*,\ x + \sin(x) > 0.}$

2. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t + \sin t}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, car inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t+\sin(t)}$ est $\mathscr{C}^1$, avec $F' : x \mapsto \dfrac{1}{x + \sin(x)}$.
Puisque de plus F' est $\mathscr{C}^\infty$ (car quotient de fonctions qui le sont), F est également $\mathscr{C}^\infty$.
Mais alors pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t+\sin t} + \int_1^{2x} \frac{dt}{t+\sin t} = \int_1^{2x} \frac{dt}{t+\sin t} - \int_1^{x} \frac{dt}{t+\sin t} = F(2x) - F(x).$$

Donc par composition et somme de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et alors, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \boxed{\frac{2}{2x + \sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}}.$$

Danger ! Le théorème fondamental de l'analyse nous laisse le choix dans la constante que l'on prend comm borne du bas de l'intégrale. La plupart du temps on choisit 0, ce n'est pas un bon choix ici puisque $\frac{1}{t+\sin t}$ n'est pas définie en 0. Nous avons choisi 1, mais n'importe quel autre réel strictement positif aurait fait l'affaire.

3. Étude de la limite de f en $+\infty$

3.a. Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| &= \left| \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \right| \\
&= \left| \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t(t+\sin t)}\, dt \right| \\
&\leqslant \int_x^{2x} \left| \frac{\sin t}{t(t+\sin t)} \right| dt \\
&\boxed{\leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t+\sin t)}}.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire est valable car $x < 2x$: les bornes sont dans le bon sens.

3.b. Puisque pour tout $t > 0$, $\dfrac{t}{2} + \sin(t) \geqslant \dfrac{t}{2} - 1$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{2} + \sin(t) = +\infty$.
Et donc en particulier[1] il existe $m > 0$ tel que pour tout $t > m$, $\dfrac{t}{2} + \sin(t) > 0$, et donc

$$\boxed{t + \sin(t) \geqslant \frac{t}{2}}.$$

[1] Prendre $A = 0$ dans la définition quantifiée de limite infinie.

3.c. Ainsi pour $x > m$, et pour tout $t \in [x, 2x]$, $t > m$, de sorte que $t + \sin(t) \geqslant \dfrac{t}{2}$, et donc $\dfrac{1}{t+\sin(t)} \leqslant \dfrac{2}{t}$.
Par conséquent, $\dfrac{1}{t\,(t+\sin t)} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, si bien que par croissance de l'intégrale[2]

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t(t+\sin t)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{2}{t^2}\,dt \leqslant \left[-\frac{2}{t} \right]_x^{2x} \leqslant \frac{2}{x} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

[2] Encore une fois, $x < 2x$, donc les bornes sont dans le bon sens.

On en déduit donc par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right) = 0.$$

Mais par ailleurs, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$.

Et donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).}$

4. Étude de f au voisinage de 0.

4.a. Si de tels a et ε existent, on doit avoir pour tout $t > 0$, $\dfrac{t}{t+\sin t} = a + \varepsilon(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

Mais puisque $t + \sin(t) \underset{t\to 0}{=} t + t + o(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t$, on a $\dfrac{t}{t+\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Donc si on pose $a = \frac{1}{2}$, et pour tout $t > 0$, $\varepsilon(t) = \dfrac{t}{t+\sin(t)} - \dfrac{1}{2}$, on a bien $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, et pour tout $t > 0$,

$$\boxed{\frac{1}{t+\sin(t)} = \frac{1}{2t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}.}$$

4.b. Notons que par construction[3], la fonction ε de la question précédente est continue sur $]0,+\infty[$ par opérations usuelles sur des fonctions qui le sont.
Et donc pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{2t} + \int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = \frac{\ln(2)}{2} + \int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt.$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Puisque $\varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]0,\eta]$, $|\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon_0$.
Et donc

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{|\varepsilon(t)|}{t}\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{\varepsilon_0}{t}\,dt.$$

Si on note de plus que pour tout $t \in [x, 2x]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$, il vient

$$\left|f(x) - \frac{\ln(2)}{2}\right| = \left|\int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{\varepsilon_0}{x}\,dt \leqslant \frac{\varepsilon_0}{x}(2x - x) \leqslant \varepsilon_0.$$

Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\eta]$,

$$\left|f(x) - \frac{\ln(2)}{2}\right| \leqslant \varepsilon_0.$$

C'est la définition de $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\ln(2)}{2}.}$

[3] Nous avons donné une formule explicite pour $\varepsilon(t)$.

Remarque

Si nous avons justifié de la continuité de ε, c'est uniquement pour justifier que l'intégrale de $\frac{\varepsilon(t)}{t}$ est bien définie.

4.c. Notons que l'existence de ce prolongement par continuité vient d'être justifiée par la question précédente. On a alors, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)} = \frac{2x + 2\sin(x) - 2x - \sin(2x)}{(x+\sin(x))(2x+\sin(2x))} = \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(x+\sin(x))(2x+\sin(2x))}.$$

Or $x + \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et donc $2x + \sin(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 4x$.

De plus $2\sin(x) - \sin(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) - 2x + \dfrac{(2x)^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$.

Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{8x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{8} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, f' possède une limite finie en 0.

Puisque par ailleurs f est déjà $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, son prolongement par continuité à $[0,+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Méthode

L'utilisation du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ nous permet de calculer uniquement la limite de f'.
Si on ne souhaite pas/ne sait pas l'utiliser, il y a deux limites à calculer : celle du taux d'accroissement de $\tilde{f}$ en 0, qui justifie de l'existence de $\tilde{f}'(0)$, puis la limite de $f'(x)$ en 0, qui justifie de la continuité de la dérivée en 0.

▸ Exercice 2 : probabilités

1. Comme il est impossible d'avoir deux boules rouges consécutives en un seul tirage, on a déjà $q_1 = \mathbf{P}(A_1) = \boxed{1.}$

Et $p_1 = \mathbf{P}(A_1 \cap B_1) = \mathbf{P}(B_1) = \boxed{\frac{1}{2}.}$

De plus, $p_2 = \mathbf{P}(A_2 \cap B_2) = \mathbf{P}(B_2)$ puisque $B_2 \subset A_2$. Donc $\boxed{p_2 = \frac{2}{3}.}$

Enfin, $\overline{A_2} = R_1 \cap R_2$, si bien que $\mathbf{P}(\overline{A_2}) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}_{R_1}(R_2)$.
Mais au moment de réaliser le second tirage, l'urne contient 3 boules dont une rouge, quel que soit le résultat du premier tirage. Autrement dit $\mathbf{P}_{R_1}(R_2) = \mathbf{P}(R_2)$, et donc R_1 et R_2 sont indépendants. Et donc

$$\mathbf{P}(\overline{A_n 2}) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

si bien que

$$q_2 = \mathbf{P}(A_2) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_2}) = \boxed{\frac{5}{6}.}$$

Détails
Si on tire une blanche au second tirage, on ne peut pas avoir deux rouges lors des deux premiers tirages.

2. On a $R_1 \cap R_2 \subset \overline{A_n}$, si bien que par croissance de la probabilité, $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) \leqslant \mathbf{P}(\overline{A_n})$.
Mais $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{2}\mathbf{P}_{R_1}(R_2)$.
On en déduit que $\frac{1}{6} \leqslant \mathbf{P}(\overline{A_n})$, si bien que $\mathbf{P}(A_n) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_n}) \leqslant 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Sur le même principe, $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \subset A_n$, et donc par indépendance des tirages[4],

$$\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2)\cdots\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} \leqslant \mathbf{P}(A_n).$$

Et au final on a bien $\boxed{\frac{1}{n+1} \leqslant q_n \leqslant \frac{5}{6}.}$

[4] Expliquée ci-dessus.

3. L'événement $A_n \cap B_n$ est l'événement «lors des n premiers tirages on n'a jamais obtenu deux boules rouges consécutives **et** la $n^{\text{ème}}$ boule est blanche».
L'événement $A_{n-1} \cap B_n$ est l'événement «lors des $n-1$ premiers tirages on n'a jamais obtenu deux boules rouges consécutives et la $n^{\text{ème}}$ boule est blanche».
Il est clair que $A_n \subset A_{n-1}$ et donc $A_n \cap B_n \subset A_{n-1} \cap B_n$.
Mais inversement, si on n'a pas eu deux boules rouges consécutives lors des $n-1$ premiers tirages et que la $n^{\text{ème}}$ est blanche, alors on n'a pas non plus obtenu deux boules rouges consécutives lors des n premiers tirages. Et donc $A_{n-1} \cap B_n \subset A_n \cap B_n$.
Et par conséquent, $\boxed{A_{n-1} \cap B_n = A_n \cap B_n.}$

Inclusion
Si on n'a pas eu deux rouges consécutives en n tirages, on en n'avait pas non plus eu lors des $n-1$ premiers tirages. Donc si A_n est réalisé, alors A_{n-1} l'est aussi.

4. On a donc $\mathbf{P}(A_n \cap B_n) = \mathbf{P}(A_{n-1} \cap B_n) = \mathbf{P}(A_{n-1})\mathbf{P}_{A_{n-1}}(B_n)$. Mais l'événement B_n est indépendant de A_{n-1} puisque la composition de l'urne au moment d'effectuer le $n^{\text{ème}}$ tirage est la même quelles que soient les boules obtenues lors des $n-1$ premiers tirages.
Et donc l'événement B_n est indépendant de tout événement qui ne dépend que des résultats des tirages précédents, et en particulier de A_{n-1}.
Donc $p_n = \mathbf{P}(A_{n-1} \cap B_n) = \mathbf{P}(A_{n-1})\mathbf{P}(B_n) = \boxed{q_{n-1}\frac{n}{n+1}.}$

5. Sur le même principe qu'à la question 3, on a $A_n \cap R_n = A_{n-2} \cap B_{n-1} \cap R_n$.
En effet, si on a obtenu une boule rouge au $n^{\text{ème}}$ tirage et qu'on n'a jamais obtenu deux boules rouges consécutives lors des n premiers tirages, alors nécessairement on a obtenu une boule blanche au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage[5]

[5] Puisque sinon on aurait obtenu deux boules rouges consécutives aux tirages numéros $n-1$ et n.

Et toujours par indépendance des tirages,

$$\mathbf{P}(A_n \cap R_n) = \mathbf{P}(A_{n-2} \cap B_{n-1} \cap R_n) = \mathbf{P}(A_{n-2} \cap B_{n-1})\mathbf{P}(R_n) = p_{n-1}\frac{1}{n+1}.$$

Appliquons alors la formule des probabilités totales au s.c.e. $\{B_n, R_n\}$:

$$q_n = \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n \cap R_n) + \mathbf{P}(A_n \cap B_n) = \boxed{p_n + p_{n-1}\frac{1}{n+1}.}$$

6. Il s'agit de combiner les relations des deux questions précédentes :

$$p_{n+1}-p_n = q_n\frac{n+1}{n+2}-p_n = \left(p_n + \frac{1}{n+1}p_{n-1}\right)\frac{n+1}{n+2}-p_n = -\frac{1}{n+2}p_n+\frac{1}{n+2}p_{n-1} = \boxed{-\frac{1}{n+2}\left(p_n - p_{n-1}\right).}$$

7. On a donc $p_3 - p_2 = -\frac{1}{4}(p_2 - p_1)$, puis

$$p_4 - p_3 = -\frac{1}{5}(p_3 - p_2) = \frac{1}{4\times 5}(p_2 - p_1) \text{ et } p_5 - p_4 = -\frac{1}{6}(p_4 - p_3) = \frac{(-1)^3}{4\times 5\times 6}(p_2 - p_1).$$

Et donc pour $k \geqslant 2$,

$$p_k - p_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{4\times 5\times\cdots\times(k+1)}(p_2 - p_1).$$

Mais on a déjà dit que $p_1 = \frac{1}{2}$ et $p_2 = \frac{2}{3}$, donc $p_2 - p_1 = \frac{1}{6}$. Donc

$$p_k - p_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2\times 3\times 4\times\cdots\times(k+1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)!}.$$

Et alors à l'aide d'une somme télescopique,

$$\begin{aligned} p_n = p_n - p_1 + p_1 &= \sum_{k=1}^{n-1}(p_{k+1} - p_k) + p_1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(k+2)!}\\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}\\ &= \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!} + \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!}\right)\\ &= \boxed{1 - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}.} \end{aligned}$$

On fait apparaître les termes manquants pour obtenir la somme de l'énoncé.

8. Nous savons[6] que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$, et donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-1}$.

Puisque p_{n-1} possède une limite finie et que $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+i\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{1}{n+1}p_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$q_n = p_n + \frac{1}{n+1}p_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{1 - e^{-1}.}$$

[6] C'est une série exponentielle avec $x = -1$.

Remarque

Si on décide de répéter l'expérience tant qu'on n'a pas eu deux boules rouges consécutives, $1 - e^{-1}$ est donc la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais.

▸ Problème : racines carrées de matrices

1. On a $A = M^2$, et donc $AM = M^2M = M^3 = MM^2 = MA$, donc $\boxed{A \text{ et } M \text{ commutent.}}$

Partie I. Étude de deux exemples dans le cas $n = 3$.

2. Puisque N est échelonnée, son rang est égal au nombre de ses pivots, et donc $\boxed{\mathrm{rg}(N) = 2.}$
Pour A, puisque ses deux dernières colonnes sont colinéaires, $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$.
Et puisque par ailleurs les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires, A est de rang au moins égal à 2, et donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$

3. On a $\mathrm{tr}(A) = 17$ et $\mathrm{tr}(N) = 0$, donc $\boxed{A \text{ et } N \text{ ne sont pas semblables.}}$
Mais puisqu'elles ont le même rang, $\boxed{A \text{ et } N \text{ sont équivalentes.}}$

Rappel

Bien que la définition de la relation d'équivalence sur les matrices soit compliquée au premier abord, nous avons prouvé qu'il s'agit en fait de la relation «avoir le même rang».

4.a. On a $\dim\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = 3 - \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3)$.
Mais $A - I_3 = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5\\ -5 & 2 & -3\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$. On remarque alors que la première colonne est égale à la

dernière moins la seconde, donc $A-I_3$ est de rang inférieur ou égal à 2. Et puisque les deux dernières colonnes ne sont pas colinéaires, $\mathrm{rg}(A-I_3) \geqslant 2$, si bien que $\mathrm{rg}(A-I_3)=2$, et donc $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})=1.}$

La relation notée sur les colonnes de $A-I_3$ est $C_1 = C_3 - C_2$, soit encore $C_1+C_2-C_3=0$.

Donc $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-I_3)$, si bien que $(1,1,-1) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$.

Rappel

Puisque $A-I_3$ représente $f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$ dans la base canonique, les éléments de $\mathrm{Ker}(A-I_3)$ sont les vecteurs formés des coordonnées, dans la base canonique, des éléments de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$.

Puisque ce noyau est de dimension 1, $(1,1,-1)$ en est donc une base, si bien que

$$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1,1,-1)) = \{(\lambda,\lambda,-\lambda),\ \lambda\in\mathbf{R}\}.$$

Et donc $(-1,-1,1) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$ est également une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$.

4.b. La matrice de la famille $\mathscr{C}$ dans la base canonique est $P = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array} \end{array}$. Or nous savons que $\mathscr{C}$ est une base si et seulement si P est inversible. Mais

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3\leftrightarrow L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est inversible, et l'inversibilité est préservée par opérations élémentaires sur les lignes, donc P est inversible, si bien que $\boxed{\mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

4.c. On a déjà dit que $u_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$, et donc $(f-\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})(u_2) = 0_{\mathbf{R}^3}$, si bien que $\boxed{f(u_2)=u_2.}$

De plus, on a $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, si bien que $\boxed{f(u_1)=0_{\mathbf{R}^3}.}$

Et $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\-16\\16\end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, si bien que $\boxed{f(u_3)=16u_3.}$

4.d. Les calculs de la question précédente prouvent que dans la base (u_1,u_2,u_3), la matrice de f est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array} = \mathrm{Diag}(0,1,16)$.

Donc par la formule de changement de base,

$$\mathrm{Diag}(0,1,16) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\right)^{-1} A P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}.$$

Rappel

La matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ est la matrice des vecteurs de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Donc $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ convient, et il s'agit précisément de la matrice calculée à la question 4.b.

5.a. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Alors $M \in \mathscr{C}(D)$ si et seulement si

$$MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & 16c \\ 0 & e & 16f \\ 0 & h & 16i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 16g & 16h & 16i \end{pmatrix}$$

C'est le cas si et seulement si $b=c=d=f=g=h=0$.

Et donc si et seulement si $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Donc une base de $\mathscr{C}(D)$ est formée des trois matrices élémentaires diagonales $E_{1,1}, E_{2,2}$ et $E_{3,3}$, si bien que $\boxed{\dim \mathscr{C}(D) = 3.}$

5.b. Si $A \in M_3(\mathbf{R})$ est une racine carrée de D, alors A commute[7] avec D, et donc est diagonale[8]. Mais pour $M = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ diagonale, on a $M^2 = \mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$, si bien que $M^2 = D$ si et seulement si on a à la fois $\lambda_1 = 0, \lambda_2^2 = 1$ et $\lambda_3^2 = 16$.
On a donc

$$\boxed{\mathbf{Rac}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.}$$

[7] C'est la question 1.
[8] C'est la question 5.a.

6.a. Pour $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\Phi(\lambda M_1 + M_2) = P(\lambda M_1 + M_2)P^{-1} = \lambda P M_1 P^{-1} + P M_2 P^{-1} = \lambda \Phi(M_1) + \Phi(M_2).$$

Donc Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Il est clair que $M \mapsto P^{-1}MP$ est alors sa bijection réciproque, et donc que Φ est bijective, donc est un automorphisme.

6.b. Soit $M \in \mathbf{Rac}(D)$. Alors $\Phi(M)^2 = (PMP^{-1})^2 = PM^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.
Donc $\Phi(\mathbf{Rac}(D)) \subset \mathbf{Rac}(A)$.

Inversement, si $M \in \mathbf{Rac}(A)$, alors $M^2 = A$, et donc $\left(P^{-1}MP\right)^2 = P^{-1}M^2P = P^{-1}AP = D$, si bien que $P^{-1}MP = \Phi^{-1}(M) \in \mathbf{Rac}(D)$.
Et donc $M = \Phi\left(\Phi^{-1}(M)\right) \in \Phi(\mathbf{Rac}(D))$.
Donc $\mathbf{Rac}(A) \in \Phi(\mathbf{Rac}(D))$, et par double inclusion $\boxed{\mathbf{Rac}(A) = \Phi(\mathbf{Rac}(D)).}$

6.c. Puisque $\mathbf{Rac}(D)$ est de cardinal 4, et que Φ est injective[9], $\mathbf{Rac}(A) = \Phi\left(\mathbf{Rac}(A)\right)$ est aussi de cardinal 4.

[9] C'est important pour dire que le cardinal ne baisse pas en appliquant Φ.

7.a. Puisque $h^2 = g$, on a $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, h$, et donc $\mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(h)$.
Mais $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(A) = 2$, si bien que $\mathrm{rg}(h) \geqslant 2$.
Si on avait $\mathrm{rg}(h) = 3 = \dim \mathbf{R}^3$, alors h serait bijective, si bien que g le serait aussi car composée de bijections. Et alors $\mathrm{rg}(g) = 3$, ce qui n'est pas le cas.
Donc on a bien $\boxed{\mathrm{rg}(h) = 2.}$

7.b. Nous avons déjà dit que $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, h$, et puisque ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension (égale à 2), $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, h$.
Autrement dit, on a $\mathrm{Im}\, h^2 = \mathrm{Im}\, h$.

Prouvons alors que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{Im}\, h^k = \mathrm{Im}\, h^{k+1}$.
Soit $k \geqslant 1$. Puisque $h^{k+1} = h^k \circ h$, on a déjà $\mathrm{Im}\, h^{k+1} \subset \mathrm{Im}\, h^k$.
Pour l'inclusion réciproque, considérons $y \in \mathrm{Im}\, h^{k+1}$ et soit $x \in \mathbf{R}^3$ tel que $y = h^{k+1}(x)$.
Alors $h^2(x) \in \mathrm{Im}(h^2) = \mathrm{Im}\, h$, et donc il existe $x' \in \mathbf{R}^3$ tel que $h^2(x) = h(x')$.
Et donc $y = h^{k-1}(h^2(x)) = h^{k-1}(h(x')) = h^k(x') \in \mathrm{Im}\, h^k$.
Donc on a bien l'égalité $\mathrm{Im}\, h^k = \mathrm{Im}\, h^{k+1}$.
Par conséquent, la suite $(\mathrm{Im}\, h^k)_{k \geqslant 1}$ est constante si bien que $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 1, \mathrm{Im}\, h^k = \mathrm{Im}\, h.}$

Plus généralement
On a toujours

$$\mathrm{Im}\, f \supset \mathrm{Im}\, f^2 \supset \mathrm{Im}\, f^3 \supset \dots$$

et dès que deux images consécutives sont égales, la suite stationne.

7.c. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $N^3 = 0_3$, si bien que g^3 est l'endomorphisme nul. Mais $g^3 = h^6$, donc $\mathrm{Im}(h^6) = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.
On en déduit donc que $\boxed{N \text{ ne possède pas de racine carrée.}}$

Partie II. Racines carrées d'une matrice tridiagonale

8. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors $\deg P' \leqslant \deg P - 1$, et donc $\deg(X^2 - 1)P' \leqslant \deg P + 1$.
De même, $\deg(1 - X)P = \deg P + 1$.
Donc $\deg \varphi(P) \leqslant \deg P + 1$.
Si $\deg P < n$, on a bien $\deg \varphi(P) \leqslant n$ et donc $\varphi(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.
En revanche ceci n'est pas trivial si $\deg P = n$.
Notons que $\varphi(X^n) = (X^2 - 1)nX^{n-1} + n(1 - X)X^n = nX^n - nX^{n-1} \in \mathbf{R}_n[X]$.
Et donc si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, en notant $P = a_n X^n + Q$, avec a_n le coefficient de degré n de P et $Q \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, il vient

$$\varphi(P) = a_n \underbrace{\varphi(X^n)}_{\in \mathbf{R}_n[X]} + \underbrace{\varphi(Q)}_{\in \mathbf{R}_n[X]} \in \mathbf{R}_n[X].$$

Donc φ est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$, et étant linéaire, est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

9. On a $\varphi(1) = n(1-X)$, $\varphi(X^n) = nX^n - nX^{n-1}$, et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\varphi(X^k) = k(X^2-1)X^{k-1} + n(1-X)X^k = (k-n)X^{k+1} + nX^k - kX^{k-1}.$$

Et donc on a bien

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \ldots & \varphi(X^{n-2}) & \varphi(X^{n-1}) & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} n & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ -n & n & -2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -n+1 & n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n & -n+1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -2 & n & -n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} = \boxed{A_n.}$$

Remarque

Pour $k = 0$ et $k = n$, notre notation est légèrement abusive puisqu'elle fait apparaître des puissances négatives de polynômes... Fort heureusement, cela est compensé par le fait qu'on les multiplie par 0.
Mais traiter à part ces deux cas est sûrement une bonne idée.

10. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$P_k' = (n-k)(X-1)^{n-k-1}(X+1)^k + k(X-1)^{n-k}(X+1)^{k-1}.$$

Et donc

$$(X^2-1)P_k' = (X-1)(X+1)P_k' = (X-1)^{n-k}(X+1)^k\left[(n-k)(X+1) + k(X-1)\right] = P_k \times (nX+n-2k).$$

Et donc $\varphi(P_k) = (nX+n-2k)P_k + n(1-X)P_k = \boxed{(2n-2k)P_k.}$

11. Puisque la famille $\mathscr{B}'$ est de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$ c'est une base si et seulement si elle est libre.
Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbf{R}[X]}$ $(\star)$.
Puisque tous les P_k ont 1 pour racine, sauf P_n, en évaluant en 1 il vient $\lambda_n \underbrace{P_n(1)}_{\neq 0} = 0$.

Donc $\lambda_n = 0$. Dans $(\star)$, il ne nous reste donc que

$$\lambda_0(X-1)^n + \lambda_1(X-1)^{n-1}(X+1) + \cdots + \lambda_{n-1}(X-1)(X+1)^{n-1} = 0.$$

En divisant par $X-1$, il vient donc $\lambda_0(X-1)^{n-1} + \lambda_1(X-1)^{n-2}(X+1) + \cdots + \lambda_{n-1}(X+1)^{n-1} = 0$.
De nouveau tous ont 1 pour racine sauf le dernier, et donc en évaluant en 1, $\lambda_{n-1}2^{n-1} = 0$, donc $\lambda_{n-1} = 0$.
De proche en proche, on prouve que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Donc $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre, et[10] il s'agit donc d'une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

[10] Par cardinalité.

Et alors à l'aide de la question 10,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(P_0) & \varphi(P_1) & \ldots & \varphi(P_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2n-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 2n-2n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{array} = \mathrm{Diag}(2n, 2n-2, \ldots, 2, 0).$$

Notons dans la suite D_n cette matrice diagonale.

12. Puisque $D_n - (2n-2k)I_{n+1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id})$, on a

$$\mathrm{rg}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}) = \mathrm{rg}(D_n - (2n-2k)I_{n+1}).$$

Mais $D_n - (2n-2k)I_{n+1}$ est une matrice diagonale dont un seul coefficient diagonal est nul, donc est de rang $n+1-1 = n$.
Et par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\,(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}) = \dim \mathbf{R}_n[X] - n = n+1-n = 1$.
Enfin, puisque $\varphi(P_k) = (2n-2k)P_k$, $P_k \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id})$ et donc

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(P_k).$$

Rappel

Une droite vectorielle est engendrée par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls.

13.a. On a déjà dit à la question 1 que A_n et B commutent, donc $\boxed{\varphi \text{ et } g \text{ commutent.}}$

13.b. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id})$, de sorte que $\varphi(P) = (2n-2k)P$.
Alors[11] $\varphi(g(P)) = g(\varphi(P)) = g((2n-2k)P) = (2n-2k)g(P)$.
Et donc $(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id})(g(P)) = 0$, si bien que $g(P) \in \operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id})$, donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}) \text{ est stable par } g.}$
On en déduit notamment que $g(P_k) \in \operatorname{Ker}(\varphi - (2n-2k)\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(P_k)$, et donc il existe $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tel que $g(P_k) = \lambda_k P_k$.

Et alors $\varphi(P_k) = g^2(P_k) = g(\lambda_k P_k) = \lambda_k g(P_k) = \lambda_k^2 P_k$.
Mais $\varphi(P_k) = (2n-2k)P_k$, et donc $\boxed{\lambda_k^2 = 2n-2k.}$

[11] Par linéarité de φ.

13.c. On en déduit que $\varphi(P_k) = \varepsilon_k\sqrt{2n-2k}$, avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$.
Et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} g(P_0) & \dots & g(P_{n-1}) & g(P_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_0\sqrt{2n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{n-1}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_0 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{array}.$$

14. Inversement, si D est une matrice diagonale de la forme obtenue à la question précédente, alors $D^2 = D_n$.
Et donc si $g \in \mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])$ est tel que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = D$, alors $g^2 = \varphi$.
Donc il y a autant d'endomorphismes g de $\mathbf{R}_n[X]$ vérifiant $g^2 = \varphi$ qu'il n'y a de matrices de la forme précédente. Or il est clair qu'il y a $2^n = \operatorname{Card}\{-1, 1\}^n$ telles matrices.

Et alors puisque $g \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est une bijection de $\mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui envoie les g tels que $g^2 = \varphi$ sur les racines carrées de A_n, $\boxed{\mathbf{Rac}(A_n) \text{ est de cardinal } 2^n.}$

Partie III. Racines carrées de I_n.

15. Il s'agit d'une symétrie.

16. Puisque $f \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f)$ est une bijection de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui envoie les symétries sur les racines carrées de I_n, il s'agit de montrer qu'il y a une infinité de symétries de $\mathbf{R}^n$.

Considérons $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\}$, qui est un hyperplan de $\mathbf{R}^n$.
Alors pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $(1, \alpha, 0, \dots, 0) \notin H$, si bien que $D_\alpha = \operatorname{Vect}((1, \alpha, 0, \dots, 0))$ est un supplémentaire de H dans $\mathbf{R}^n$, et les D_α sont deux à deux distincts.
Notons alors s_α la symétrie par rapport à H parallèlement à D_α.

Alors pour $\alpha \neq \beta$, $\operatorname{Ker}(s_\alpha + \mathrm{id}) = D_\alpha \neq D_\beta = \operatorname{Ker}(s_\beta + \mathrm{id})$. Et donc $s_\alpha \neq s_\beta$, si bien qu'il existe une infinité de symétries différentes de $\mathbf{R}^n$, et donc une $\boxed{\text{infinité de racines carrées de } I_n.}$