Devoir surveillé 7

▸ Exercice 1 : endomorphismes dont le carré vérifie certains conditions.

Dans tout l'exercice, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Partie I. Étude d'un exemple

Dans cette partie $E = \mathbf{R}^3$, et on note $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Justifier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
4. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f \circ f = \lambda f$.

Partie II. Étude générale des endomorphismes vérifiant $f \circ f = \lambda f$.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$. On note $A_\lambda = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ f = \lambda f\}$.

5. Déterminer tous les isomorphismes de E dans E qui appartiennent à A_λ.
6. Soit $f \in A_\lambda$.
   a. Montrer que $\operatorname{Im} f = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$.
   b. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.
   c. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker} f$.
   d. Prouver qu'il existe une homothétie h et un projecteur p tels que $f = h \circ p$.

Partie III. Endomorphismes vérifiant $f \circ f = -\operatorname{id}_E$

7. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\operatorname{id}_E$. Si u est un vecteur non nul de E, on notera $F_u = \operatorname{Vect}(u, f(u))$. Dans toute la suite de la question, on fixe un tel vecteur u non nul.
   a. Justifier que $(u, f(u))$ est une famille libre, puis que F_u est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant u et stable par f.
   b. Soit $a \in F_u \setminus \{0_E\}$. Montrer que $F_a = F_u$.
   c. Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par f et ne contenant pas u. Prouver que G et F_u sont en somme directe, et que $F_u \oplus G$ est stable par f.
   d. Prouver alors qu'il existe des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ tels que $(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), \ldots, u_p, f(u_p))$ soit une base de E. Qu'en déduit-on au sujet de la dimension de E ?
8. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ f = -\operatorname{id}_E$ et $g \circ g = -\operatorname{id}_E$. Prouver qu'il existe $h \in GL(E)$ tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$.
9. Prouver que si E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension paire, alors il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\operatorname{id}_E$.

▸ Exercice 2 : chemins de Dyck et nombres de Catalan

Introduction

Coincée entre deux pages d'un vieux livre de mathématiques du CDI du lycée, j'ai trouvé la coupure de journal suivante, non datée, découpée dans les pages du quotidien sportif l'Équipe.

L'AS Champo 38 en finale après un match d'anthologie !

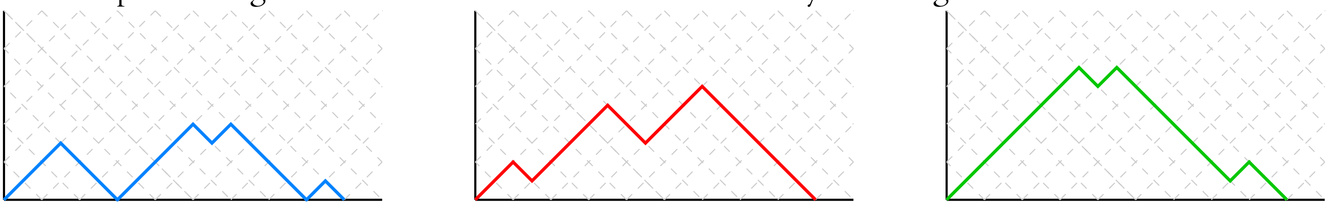
Par notre correspondant à Grenoble.
Le match retour de la demi-finale de Ligue des Champions opposant le Real Madrid à l'AS Champo 38 se jouait à guichets fermés hier soir. Et les 429 spectateurs présents au gymnase de la rue Lesdiguières se souviendront longtemps de cette soirée.
Suite à sa courte victoire 1 – 0 à Santiago Bernabéu au match aller, l'AS Champo 38 avait seulement besoin d'un match nul face au Real Madrid afin de se qualifier pour la finale.
Et même si les grenoblois n'ont jamais mené au score, ils ont réussi à accrocher un improbable 7 – 7, délivrés par une formidable retournée acrobatique de leur capitaine A. Mattone (auteur d'un quadruplé) dans les toutes dernières secondes de jeu.
Dans ce match au scénario complètement fou[...]

La suite de l'article n'avait pas été découpée, et je n'ai trouvé aucune trace ailleurs de cette demi-finale de légende.
Je ne peux donc qu'imaginer la manière dont ce match fou a pu se dérouler : est-ce que le Real a mené 7-0 avant de se faire rattraper ? Est-ce qu'au contraire à chaque fois que le Real a marqué un but l'AS Champo 38 a systématiquement recollé au score ?
Mais au fait, combien de scénarios sont-ils envisageables ? Plus précisément, combien y a-t-il de possibilités d'évolution du score en sachant que le score final était de 7 partout et que le Real n'a jamais eu de but de retard ?

Partie I. Chemins de Dyck, mots de Dyck et nombres de Catalan
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Un **chemin de Dyck** de longueur $2n$ est une suite de segments joignant $2n+1$ points, commençant en $(0,0)$, terminant en $(2n,0)$, de sorte que

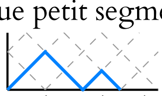
i) chaque point est obtenu à partir du précédent par une translation de vecteur $(1,1)$ ou de vecteur $(1,-1)$;
ii) tous les points sont d'ordonnée positive ou nulle.

Par exemple sur la figure ci-dessous on a tracé trois chemins de Dyck de longueur 18.

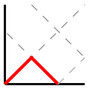


Si vous souhaitez une définition plus rigoureuse, on peut identifier les chemins de Dyck de longueur $2n$ aux **mots de Dyck** de longueur $2n$ qui sont les $(2n)$-uplets $(x_1,\dots,x_{2n})$ d'éléments de $\{-1,1\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0.$ ii) $\forall k \in [\![1,2n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant 0$

Il y a une bijection évidente entre les chemins de Dyck de longueur $2n$ et les mots de Dyck de même longueur, qui fait correspondre un 1 à chaque petit segment montant et un -1 à chaque segment descendant.
Par exemple, au chemin de Dyck  correspond le mot de Dyck $(1,1,-1,-1,1,-1)$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ (ou de manière équivalente de mots de Dyck de longueur $2n$), et on pose $C_0 = 1$. L'entier C_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ **nombre de Catalan**.

Dans tout l'exercice, vous pourrez travailler au choix avec des chemins de Dyck ou avec des mots de Dyck.
Si vous choisissez la première option, vous veillerez à vous exprimer avec des phrases claires, intelligibles et à la signification non ambigüe, et pourrez accompagner vos raisonnements de dessins.
Et si vous choisissez la seconde option il faudra que vos raisonnements soient aussi rigoureux que d'habitude.

1. Dessiner tous les chemins de Dyck de longueur 2, 4 et 6, et en déduire les valeurs de C_1, C_2, C_3.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   a. Justifier que le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n+2$ qui ne touchent l'axe des abscisses qu'en leurs extrémités est égal à C_n.
   b. Montrer que le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n+2$ qui commencent par la séquence  (ou de manière équivalente, le nombre de mots de Dyck de longueur $2n+2$ commençant par $(1,-1)$) est égal à C_n.
   c. Prouver $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$. En déduire C_4.

Dans toute la suite, on considère la fonction f définie sur $\mathscr{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, \frac{1}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Partie II. Fonction génératrice des nombres de Catalan

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} x^k + o(x^k).$$
   On note alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, de sorte que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
4. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, exprimer $xf(x)^2$ en fonction de $f(x)$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
6. Déduire de ce qui précède une expression explicite de C_n en fonction de n. Finalement, combien y avait-il de scénarios possibles pour le match mythique évoqué dans l'introduction ?
7. Donner un équivalent simple de C_n lorsque $n \to +\infty$.

▶ Exercice 3 : Dimension de l'ensemble des matrices magiques

Dans tout l'exercice n est un entier supérieur ou égal à 3.

▶ Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite **semi-magique** si il existe un réel, que l'on notera $d(A)$ tel que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = d(A) \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = d(A).$$

Notons qu'un tel réel est nécessairement unique.
Autrement dit, une matrice est semi-magique si toutes ses lignes et toutes ses colonnes ont la même somme.
On note SMag_n l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

▶ Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est **magique** si elle est semi-magique et si de plus $\operatorname{tr}(A) = d(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,n-k+1}$.

On note Mag_n l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

▶ On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Partie I. Structure de SMag_n

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est dans SMag_n si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$.
   Quel rapport y a-t-il alors entre $d(A)$ et λ ?
2. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, on pose $A_{i,j} = E_{i,j} + E_{n,n} - E_{i,n} - E_{n,j}$.
   Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, $A_{i,j} \in \mathsf{SMag}_n$.
3. Prouver que SMag_n est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et que l'application $d : A \mapsto d(A)$ est à la fois une application linéaire et un morphisme d'anneaux (de SMag_n dans $\mathbf{R}$).
4. Montrer que si $A \in \mathsf{SMag}_n$ est inversible, alors $d(A) \neq 0$ et $A^{-1} \in \mathsf{SMag}_n$. Exprimer alors $d(A^{-1})$ en fonction de $d(A)$.
5. Est-ce qu'inversement, si $d(A) \neq 0$, alors A est inversible ?
6. Montrer que Mag_n est un sous-espace vectoriel de SMag_n, mais que ce n'en est pas un sous-anneau.

Partie II. Dimensions de SMag_n et Mag_n

Dans la suite, on notera $\mathsf{SMag}_n^0 = \operatorname{Ker}(d)$, qui est donc un sous-espace vectoriel de SMag_n, puisque noyau d'une application linéaire définie sur SMag_n.
On note également $\mathsf{Mag}_n^0 = \mathsf{SMag}_n^0 \cap \mathsf{Mag}_n$.

7. Sans calculs, justifier que $\mathsf{SMag}_n = \mathsf{SMag}_n^0 \oplus \operatorname{Vect}(J)$.
8. En déduire que $\dim \mathsf{SMag}_n = \dim \mathsf{SMag}_n^0 + 1$ et que $\dim \mathsf{Mag}_n = \dim \mathsf{Mag}_n^0 + 1$.
9. Soit $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathsf{SMag}_n^0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R}) \\ A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} & \longmapsto & (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \end{array} \right.$, l'application qui a une matrice semi-magique de taille n associe la matrice de taille $n-1$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.
   On admet que ψ est linéaire. Prouver qu'il s'agit d'un isomorphisme entre SMag_n^0 et $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$.
   En déduire la dimension de SMag_n.
10. Montrer que $(A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ est une base de SMag_n^0, et en déduire une base de SMag_n.
11. Soit $\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathsf{SMag}_n^0 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ A & \longmapsto & \left(\operatorname{tr}(A), \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [A]_{k,n-k+1}\right) \end{array} \right.$.
   Calculer $\theta(A_{1,1})$ et $\theta(A_{2,2})$. En déduire que θ est surjective, puis déterminer la valeur de $\dim \mathsf{Mag}_n$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 7

▸ Exercice 1 : endomorphismes dont le carré vérifie certains conditions.

Partie I. Étude d'un exemple

1. C'est évident[1].

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -6x+4y+2z=0 \\ 3x-y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ -2y-4z=0 \\ 2y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-2z \end{cases}$$

Soit si et seulement si $(x, y, z) = (-z, -2z, z) = z(-1, -2, 1)$.
Donc $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(-1, -2, 1).}$
On en déduit par le théorème du rang que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2, et donc il suffit de donner une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ pour obtenir une base de $\operatorname{Im} f$.
Par exemple $f(1, 0, 0) = (-1, -6, 3)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$ ne sont pas colinéaires, et donc forment une base de $\operatorname{Im} f$.

3. Le théorème du rang nous dit déjà que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ ont des dimensions compatibles avec le fait d'être supplémentaires, en ce sens que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbf{R}^3$.
Pour prouver qu'ils sont bien supplémentaires, il nous reste à prouver soit qu'ils engendrent $\mathbf{R}^3$ tout entier, soit qu'ils sont en somme directe.

Prouvons par exemple que la concaténation des deux bases de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$ obtenues précédemment forment une famille libre.
Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1(-1, -2, 1) + \lambda_2(-1, -6, -3) + \lambda_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$.
Il vient alors

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -2\lambda_1-6\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -8\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ -2\lambda_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

Puisque la concaténation de deux bases de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$ est libre, ces deux sous-espaces sont en somme directe[2], et donc sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

4. On a $f(f(1, 0, 0)) = f(-1, -6, 3) = (-2, -12, 6) = 2f(1, 0, 0)$ et de même $f(f(0, 0, 1)) = f(1, 2, 1) = (2, 4, 2) = 2f(0, 0, 1)$.
Puisque de plus $f(f(-1, -2, 1)) = f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, on en déduit que les deux endomorphismes $f \circ f$ et $2f$ coïncident sur la base de $\mathbf{R}^3$ obtenue par concaténation des deux bases de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
Et donc[3] sont égales, si bien que $\boxed{f \circ f = 2f.}$

Partie II. Étude générale des endomorphismes vérifiant $f \circ f = \lambda f$.

5. Si $f \in A_\lambda$ est un isomorphisme, alors $f \circ f = \lambda f$, ce qui après composition[4] par f^{-1} nous donne $f = \lambda \operatorname{id}_E$.
Et puisqu'inversement $\lambda \operatorname{id}_E$ vérifie $(\lambda \operatorname{id}_E) \circ (\lambda \operatorname{id}_E) = \lambda^2 \operatorname{id}_E = \lambda(\lambda \operatorname{id}_E)$, alors l'homothétie de rapport λ est le seul isomorphisme de A_λ.

6.a. Si $x \in E$ vérifie $f(x) = \lambda x$, alors $x = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} f$.
Et inversement, si $y \in \operatorname{Im} f$, soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $f(y) = f(f(x)) = \lambda f(x) = \lambda y$.
Donc par double inclusion, on a bien $\boxed{\operatorname{Im} f = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}.}$

6.b. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_E$ car $x \in \operatorname{Ker} f$, mais par la question précédente, on a aussi $f(x) = \lambda x$, si bien que $\lambda x = 0_E$, et donc[5] $x = 0_E$.
Ainsi, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et donc $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe.
Puisque par le théorème du rang on a $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$, on en déduit que $\boxed{\operatorname{Im} f \text{ et } \operatorname{Ker} f \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

[1] Mais moi seul ai droit à cet argument...

[2] C'est un critère qui figure dans le cours.

[3] Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

[4] À droite ou à gauche.

[5] Car $\lambda \neq 0$.

6.c. Soit $y \in \operatorname{Im}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$, et soit alors $x \in E$ tel que $y = f(x) - \lambda x$.
Alors $f(y) = f(f(x)) - \lambda f(x) = \lambda f(x) - \lambda f(x) = 0_E$, si bien que $y \in \operatorname{Ker} f$.
Ainsi, on a bien $\boxed{\operatorname{Im}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker} f.}$

Alternative

En fait $f \circ f = \lambda f$ s'écrit encore

$$f \circ (f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Et il est alors bien connu que ceci est équivalent à $\operatorname{Im}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker} f$.

6.d. Notons p le projecteur sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.
Alors pour tout $x \in \operatorname{Im} f$, $f(x) = \lambda x = \lambda p(x)$.
Et pour tout $x \in \operatorname{Ker} f$, $f(f(x)) = 0_E = \lambda p(x)$.
Donc $f \circ f$ et λp coïncident sur $\operatorname{Ker} f$ et sur $\operatorname{Im} f$, donc sur E tout entier.
Ainsi, si $h = \lambda \mathrm{id}_E$ est l'homothétie de rapport λ, on a bien $f = h \circ p$.

Partie III. Endomorphismes vérifiant $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

7.a. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda u + \mu f(u) = 0_E$.
Alors en appliquant f il vient $\lambda f(u) + \mu f^2(u) = 0_E$, soit encore $\lambda f(u) - \mu u = 0_E$.
Et donc $\lambda(\lambda u + \mu f(u)) - \mu(\lambda f(u) - \mu u) = 0_E$, si bien que $(\lambda^2 + \mu^2)u = 0_E$.
Et puisque $u \neq 0_E$, alors $\lambda^2 + \mu^2 = 0$.
Mais puisque $\lambda^2 \geqslant 0$ et $\mu^2 \geqslant 0$, alors nécessairement $\lambda = \mu = 0$.
Donc $\boxed{(u, f(u)) \text{ est libre.}}$

Soit $x \in F_u$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, tels que $x = \lambda u + \mu f(u)$. Alors $f(x) = \lambda f(u) - \mu u \in F_u$.
Et donc $\boxed{F_u \text{ est stable par } f.}$

À présent soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f et contenant u. Alors par stabilité de F par f, $f(u) \in F$.
Et alors F est un sous-espace vectoriel contenant u et $f(u)$, il contient $\operatorname{Vect}(u, f(u))$.
Et donc F_u est bien le plus petit[6] sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant u.

Remarque

Si on n'avait pas prouvé la stabilité de F_u par f, il ne serait pas question de parler du **plus petit** sev tel que.

7.b. Si $a \in F_u$, est non nul, alors par la question précédente, F_u est stable par f, et il contient a.
Donc il contient F_a.
Mais par la question précédente, F_u est de dimension 2 (engendré par la famille libre $(u, f(u))$) et le même raisonnement prouverait que F_a est également de dimension 2.
Donc $\boxed{F_u = F_a.}$

7.c. Supposons par l'absurde que $G \cap F_u \neq \{0_E\}$, et soit a un vecteur non nul de $G \cap F_u$.
Puisque G est stable par f et contient a, il contient F_a.
Mais par ailleurs, $a \in F_u$, et donc par la question précédente, $F_a = F_u$.
Puisque $u \in F_u$ et que $F_u \subset G$, on a donc $u \in G$, ce qui est absurde.
Ainsi, G et F_u sont en somme directe.

Si $x \in G \oplus F_u$, alors il existe $x_G \in G$ et $x_u \in F_u$ tels que $x = x_G + x_u$.
Et alors $f(x) = f(x_G) + f(x_u)$.
Puisque G est stable, $f(x_G) \in G$, et de même $f(x_u) \in F_u$.
Donc $f(x) \in G \oplus F_u$, qui est donc un sous-espace vectoriel de E stable par f.

7.d. Prenons u_1 un vecteur non nul de E. Alors soit $F_{u_1} = E$, soit il existe $u_2 \in E \setminus F_{u_2}$. Et alors par la question précédente, $F_{u_1} \oplus F_{u_2}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Là encore, soit $F_{u_1} \oplus F_{u_2} = E$, soit il existe un vecteur u_3 qui n'est pas dans $F_{u_1} \oplus F_{u_2}$.
Mais alors, $F_{u_1} \oplus F_{u_2} \oplus F_{u_3}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Notons $p = \left\lfloor \frac{\dim E}{2} \right\rfloor$ et prouvons par récurrence finie sur $k \in [\![1, p]\!]$ qu'il existe une suite $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ de vecteurs non nuls de E tels que $F_{u_1} \oplus F_{u_2} \oplus \cdots \oplus F_{u_k}$ soit un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Soit $k \leqslant p - 1$ tel qu'il existe $u_1, \dots, u_k$ tels que $F_{u_1} \oplus \cdots \oplus F_{u_k}$ soit stable par f.
Alors $F_{u_1} \oplus \cdots \oplus F_{u_k}$ est de dimension $2k < \dim E$, et donc n'est pas égal à E.
Il existe donc $u_{k+1} \in E \setminus (F_{u_1} \oplus \cdots \oplus F_{u_k})$.
Alors par ce qui précède, $F_{u_1} \oplus \cdots \oplus F_{u_k}$ et $F_{u_{k+1}}$ sont en somme directe, et leur somme est stable par f.
Donc par le principe de récurrence[7] il existe $u_1, \dots, u_p$ tels que la somme $F_{u_1} + \cdots + F_{u_p}$ soit directe et stable par f.

[7] Finie.

Supposons par l'absurde que cette somme ne soit pas égale à E tout entier, et soit u_{p+1} un vecteur de E qui n'est pas dans $\bigoplus_{i=1}^{p} F_{u_i}$.

Alors comme précédemment, la somme $F_{u_1} + \cdots F_{u_p} + F_{u_{p+1}}$ est directe.
Mais alors cette somme est un sous-espace vectoriel de E dimension $2(p+1)$, si bien que $2p+2 \leqslant \dim E$, et donc $p+1 \leqslant \dfrac{\dim E}{2}$.
Ceci contredit la définition de p comme étant le plus grand entier k tel que $2k \leqslant \dim E$.
On en déduit donc que $E = F_{u_1} \oplus \cdots \oplus F_{u_p}$, et en particulier, une base de E est obtenue par concaténation de bases des F_{u_i}.

C'est notamment le cas si on prend pour base de F_{u_i} la famille $(u_i, f(u_i))$.
Et donc il existe bien une base de E de la forme annoncée.
Et on en déduit notamment que $\boxed{\dim E \text{ est un entier pair.}}$

8. Commençons par noter que pour $h \in GL(E)$, on a $g = h \circ f \circ h^{-1}$ si et seulement si $g \circ h = h \circ f$.
Nous allons donc chercher à construire un tel h.
Par la question 7.d, il existe $u_1, \dots, u_p$ et $v_1, \dots, v_q$ des vecteurs non nuls de E tels que $(u_1, f(u_1), \dots, u_p, f(u_p))$ et $(v_1, g(v_1), \dots, v_q, f(v_q))$ soient des bases de E.
Mais alors $\dim E = 2p = 2q$, si bien que $p = q$.

Il existe alors une unique application linéaire $h : E \to E$ telle que $h(u_1)) = v_1, \dots, h(u_p) = v_p$ et $h(f(u_1)) = g(u_1), \dots, h(f(u_p)) = g(u_p)$.
Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $h(f(u_i)) = g(v_i) = g(h(u_i))$ et $(h \circ f)(f(u_i)) = h(-u_i) = -v_i$ et $(g \circ h)(f(u_i)) = g(g(u_i)) = -u_i$.
Autrement dit, les applications $h \circ f$ et $g \circ h$ coïncident sur la base $(u_1, f(u_1), \dots, u_p, f(u_p))$ de E, et donc sont égales : $h \circ f = g \circ h$.
Reste à noter que h est bien un isomorphisme.
Mais il envoie la base $(u_1, f(u_1), \dots, u_p, f(u_p))$ de E sur une base de E, et une propriété du cours nous garantit qu'il s'agit alors d'un isomorphisme de E.

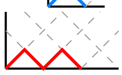
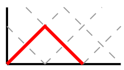
> **Rappel**
> Une application linéaire est uniquement déterminée par ses valeurs sur une base de E.

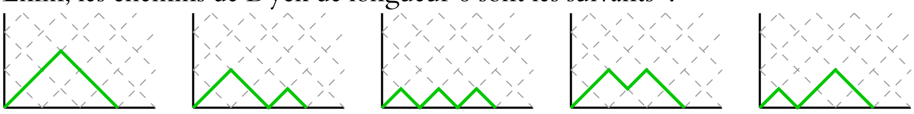
9. Soit E un espace vectoriel de dimension $2p$, et soit $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{2p})$ une base de E.
Il existe alors un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = -e_1$, $f(e_3) = e_4$, $f(e_4) = -e_3 \dots, f(e_{2p-1}) = e_{2p}$ et $f(e_{2p}) = -e_{2p-1}$.
Et alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(f(e_{2i-1})) = f(e_{2i}) = -e_{2i-1}$ et $f(f(e_{2i})) = f(-e_{2i-1}) = -e_{2i}$.
Donc $f \circ f$ et $-\mathrm{id}_E$ coïncident sur une base de E, donc sont égaux : $\boxed{f \circ f = -\mathrm{id}_E.}$

▸ Exercice 2 : chemins de Dyck et nombres de Catalan

Partie I. Mots de Dyck, chemins de Dyck et nombres de Catalan

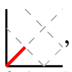
1. Il existe un unique chemin de Dyck de longueur 2 qui est  et donc $\boxed{C_1 = 1.}$

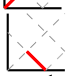
Il y a deux chemins de Dyck de longueur 4, qui sont ·  
Enfin, les chemins de Dyck de longueur 6 sont les suivants :



Et donc $\boxed{C_3 = 5.}$

2.a. **Première méthode** : par les chemins de Dyck.
Un chemin de Dyck de longueur $2n+2$ qui ne touche l'axe des abscisses qu'en ses extrémités commence nécessairement par monter[8], finit nécessairement par descendre[9] pour toucher l'axe des abscisses en $(2n+2, 0)$, et entre les deux reste toujours au dessus de la droite d'équation $y = 1$.

Autrement dit, il est obtenu par concaténation d'un chemin montant de longueur 1 ,

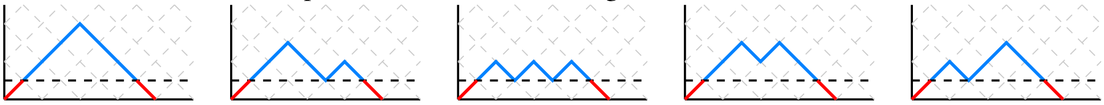
d'un chemin de Dyck de longueur $2n$, et d'un chemin descendant de longueur 1 : 

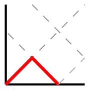
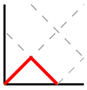
Il y a donc autant de tels chemins que de chemins de Dyck de longueur $2n$, si bien que le nombre de tels chemins est C_n.

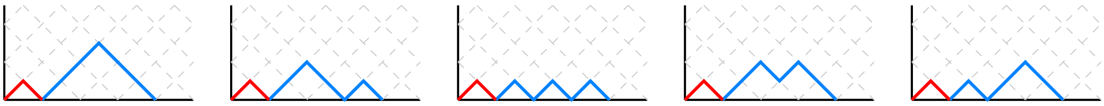
[8] Comme tous les chemins de Dyck.
[9] Même remarque.

FIGURE 0.1 – Deux chemins de Dyck ne touchant l'axe des absicsses qu'en leurs extrémités.

Par exemple, voici tous les chemins de Dyck de longueur 8 ne rencontrant l'origine qu'en leurs extrémités, obtenus à partir des 5 chemins de longueur 6.



2.b. Un chemin de Dyck de longueur $2n+2$ qui commence par  est nécessairement formé de ce chemin de longueur 2 (qui est l'unique chemin de Dyck de longueur 2) et d'un chemin de Dyck de longueur $2n$.
Autrement dit, le nombre de tels chemins est C_n.
Encore une fois, voici la liste de tous les chemins de Dyck de longueur 8, qui commencent par  qui se déduisent des 4 chemins de Dyck de longueur 6 :



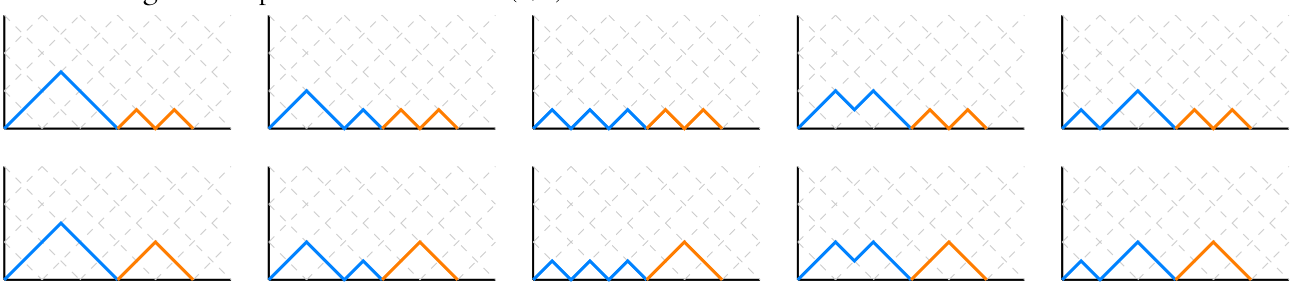
2.c. Les chemins de Dyck de longueur $2n+2$ sont de deux types :

- ►ceux qui ne touchent l'axe des abscisses qu'en leurs extrémités (et nous savons déjà qu'il y en exactement C_n)
- ►ceux qui rencontrent l'axe des abscisses en un point d'abscisse différente de 0 ou $2n+2$.

Il s'agit donc de dénombrer les chemins du second type.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons C_n^k le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n+2$ qui effectuent leur premier retour à l'origine au point d'abscisse $2k$.
Pour former un tel chemin, il faut commencer par choisir un chemin de Dyck de longueur $2k$ qui ne touche l'axe des abscisses qu'en ses extrémités, puis le faire suivre d'un autre chemin de Dyck, de longueur $2n+2-k$.
Par la question 2.a, il y a C_{k-1} choix possibles pour le premier chemin, et pour chaque choix du premier chemin, il y a $C_{n+1-k} = C_{n-(k-1)}$ choix possibles du second chemin.
Et donc $C_n^k = C_{k-1}C_{n-(k-1)}$.

Remarque
Le premier retour à l'origine ne peut se faire qu'après un nombre pair d'étapes, puisqu'il faut avoir monté autant de fois qu'on est descendu.

Par exemple voici tous les chemins de Dyck de longueur 10 qui effectuent leur premier retour à l'origine en le point de coordonnées $(6, 0)$.



Puisqu'on a partitionné l'ensemble de tous les chemins de Dyck de longueur $2n+2$ en sous-ensembles disjoints, on a donc

$$C_{n+1} = C_n + \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-(k-1)} = \underbrace{C_0}_{=1} C_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.}$$

Notons que notre raisonnement n'est pas forcément valable pour $n=0$, puisque le seul chemin de Dyck de longueur 2 ne touche l'origine qu'en ses extrémités, mais on a tout de même $C_1 = C_{0+1} = C_1 C_0 = \sum_{k=0}^{0} C_k C_{0-k}$.

On en déduit notamment que $C_4 = C_3 + C_2C_1 + C_1C_2 + C_3 = 2C_3 + 2C_2 = 2C_2 + 2C_3 = \boxed{14.}$

Partie I. Fonction génératrice des nombres de Catalan

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Commençons par un développement limité à l'ordre $n+1$ de $\sqrt{1+x}$: on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\frac{(-4x)^k}{k!} + o(x^{n+1})\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)(-1)^k\frac{4^k}{k!}x^k + o(x^{n+1})\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1-2i}{2}\right)(-1)^k\frac{4^k}{k!}x^k + o(x^{n+1})\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k}\left(\prod_{i=1}^{k-1}(1-2i)\right)(-1)^k\frac{4^k}{k!}x^k + o(x^{n+1}).
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\prod_{i=1}^{k-1}(1-2i) = (-1)^{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1) = (-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2\cdot 4\cdots(2k-2)} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}.$$

Et donc

$$\sqrt{1-4x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{-1}{2^k}\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{4^k}{k!}x^k + o(x^{n+1}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \sum_{k=1}^{n+1} 2\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k + o(x^{n+1}).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{n+1} 2\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^{k-1} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}x^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{(2k!)}{k!k!}x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k + o(x^n).}
\end{aligned}$$

4. Pour $x \in \mathscr{D}_f$, on a

$$xf(x)^2 = \frac{\left(1-\sqrt{1-4x}\right)^2}{4x} = \frac{1-2\sqrt{1-4x}+1-4x}{4x} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} - 1 = \boxed{f(x)-1.}$$

5. On a donc

$$\begin{aligned}
f(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^2 + o(x^n) + o(x^{2n})\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n}\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell a_{k-\ell}x^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell a_{k-\ell}x^k + o(x^n).
\end{aligned}$$

Détails
On a utilisé la formule pour un produit de polynômes.

Détails
Les termes du produit qui étaient de degré supérieur ou égal à $n+1$ sont tous passés dans le $o(x^n)$.

Et donc on en déduit que $xf(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell a_{k-\ell} x^{k+1} + o(x^{n+1})$.
Mais par ailleurs, le développement limité d'ordre $n+1$ de $xf(x)^2 = f(x)-1$ est

$$f(x)-1 \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^k + o(x^{n+1}).$$

Par identification du coefficient de degré $n+1$, on obtient donc $\boxed{a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.}$

6. Puisque $a_0 = 1 = C_0$, et que les C_n et les a_n satisfont la même relation de récurrence, ils doivent être égaux pour tout n.
Prouvons-le rapidement par récurrence forte, initialisée puisque $a_0 = C_0$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = C_k$. Alors

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = a_{n+1}.$$

Et donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{C_n = a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.}$

Notamment, le nombre de scénarios possibles du match de l'AS Champo 38, qui est précisément le nombre de chemins de Dyck de longueur 14 (les déplacements vers le haut correspondant aux buts du Real, ceux vers le bas aux buts de Champo), est donc $C_7 = \frac{1}{8}\binom{14}{7} = \frac{1}{8}\frac{14\times 13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} = 3\times 11\times 13 = \boxed{429.}$

7. Partons donc de $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}$, et utilisons la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad \text{et} \quad (2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}$$

si bien que

$$C_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{4^n}{n\sqrt{n}\sqrt{\pi}}.}$$

Commentaire *: les nombres de Catalan apparaissent dans d'autre problèmes de dénombrement et servent par exemple à dénombrer les arbres binaires enracinés à n sommets ou encore le nombre de manières de parenthèser correctement un mot de n + 1 lettres.*

▸ Exercice 3 : Dimension de l'ensemble des matrices magiques

Partie I. Structure de SMag_n

1. Le calcul est classique, et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AJ]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \text{ et } [JA]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}.$$

Autrement dit, tous les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AJ sont égaux, égaux à la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A, et tous les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de JA sont égaux à la somme des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

> **Plus convaincant ?**
> Plutôt que ces calculs, vous pouvez aussi bien écrire le produit matriciel avec des pointillés, et constater que les coefficients de AJ et de JA sont bien des sommes de lignes/colonnes de A.

Donc si A est semi-magique, et si on note $\lambda \in \mathbf{R}$ la somme des coefficients de n'importe quelle ligne/colonne de A, alors tous les coefficients de AJ et de JA sont égaux à λ, et donc $AJ = JA = \lambda J$.
Et inversement, si $AJ = JA = \lambda J$, alors la somme de chaque ligne et chaque colonne de A est égale à λ, si bien que A est semi-magique.
Ainsi, on a bien prouvé que $A \in \mathsf{SMag}_n$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$.
Et au passage nous avons prouvé que $\lambda = d(A)$.

2. Soit $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$.
Alors pour $k \notin \{i, n\}$, tous les coefficients de la $k^{\text{ème}}$ ligne de $A_{i,j}$ sont nuls, donc leur somme est nulle.
Sur la $i^{\text{ème}}$ ligne de $A_{i,j}$, seuls deux coefficients sont non nuls : un 1 à la $j^{\text{ème}}$ colonne et un -1 à la $n^{\text{ème}}$. Donc la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne est nulle.
Et de même, la $n^{\text{ème}}$ ligne de $A_{i,j}$ contient un 1 (à la colonne n), un -1 (à la colonne j) et des 0 partout ailleurs, donc sa somme est nulle.
On raisonne de même pour montrer que la somme de chacune des colonnes de $A_{i,j}$ est nulle, et donc $\boxed{A_{i,j} \in \mathsf{SMag}_n, \text{ avec } d(A_{i,j}) = 0.}$

3. Commençons par noter que la matrice nulle et la matrice identité sont bien dans SMag_n, avec $d(0_n) = 0$ et $d(I_n) = 1$.
Soient $A, B \in \mathsf{SMag}_n$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $(\lambda A + B)J = \lambda AJ + BJ = (\lambda d(A) + d(B))J$ et de même $J(\lambda A + B) = (\lambda d(A) + d(B))J$.
Donc $\lambda A + B \in \mathsf{SMag}_n$, et $d(\lambda A + B) = \lambda d(A) + d(B)$.
Ainsi, $\boxed{\mathsf{SMag}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$, et d est une application linéaire de SMag_n dans[10] $\mathbf{R}$.

Notons en particulier que ceci prouve que Mag_n est un sous-groupe[11] de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et donc que $A - B \in \mathsf{SMag}_n$.
De même, on a $(AB)J = A(BJ) = A(d(B)J) = d(A)d(B)J$ et
$J(AB) = (JA)B = d(A)JB = d(A)d(B)J$.
Et donc $AB \in \mathsf{SMag}_n$, si bien que $\boxed{\mathsf{SMag}_n \text{ est un sous-anneau de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$
Et puisque $d(AB) = d(A)d(B)$, alors $\boxed{d \text{ est un morphisme d'anneaux.}}$

[10] Autrement dit, d est une forme linéaire sur Mag_n.

[11] Additif.

4. Soit $A \in \mathsf{SMag}_n$ une matrice inversible, d'inverse A^{-1}.
Puisque $AJ = d(A)J$, alors $J = d(A)A^{-1}J$. La matrice J étant non nulle, cela prouve déjà que $d(A) \neq 0$, et on a alors $A^{-1}J = \frac{1}{d(A)}J$.
De même, en partant de $JA = AJ$, il vient, après multiplication à droite et à gauche par A^{-1} : $A^{-1}J = JA^{-1}$.
Et $A^{-1}J = \frac{1}{d(A)J}$, si bien que $A^{-1}J = JA^{-1} = \frac{1}{d(A)}J$, ce qui prouve que $A^{-1} \in \mathsf{SMag}_n$ et que $\boxed{d(A^{-1}) = \frac{1}{d(A)}}.$

Inversibilité
Rappelons que pour l'instant, un des meilleurs moyens dont nous disposons pour prouver qu'une matrice n'est pas inversible est

$$AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}.$$

Cela dit, nous avons mentionné il y a peu en TD qu'une matrice est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est libre, ce qui n'est évidemment pas le cas pour J dont toutes les colonnes sont égales.

5. Un contre-exemple simple est donné par la matrice J, qui est évidemment semi-magique, avec $d(J) = n \neq 0$, mais qui n'est pas inversible, par exemple parce que $J\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n,1}$.

6. Il serait bien entendu possible d'utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels. Mais comme souvent, il est aussi possible de mettre en évidence le noyau d'une application linéaire.
Les applications d et tr étant linéaires, il en est de même de $d - \mathrm{tr}$.
De même, $\sigma : A \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,n+1-k}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et donc $d - \sigma$ est une forme linéaire.
Notons alors que $\mathsf{Mag}_n = \mathsf{SMag}_n \cap \mathrm{Ker}(d - \mathrm{tr}) \cap \mathrm{Ker}(d - \sigma)$, qui se trouve donc être un sous-espace vectoriel (car intersection de sous-espaces vectoriels) de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et donc de SMag_n.
Ce n'est pas un sous-anneau de SMag_n tout simplement car $I_n \notin \mathsf{Mag}_n$: l'une de ses deux diagonales est de somme n, l'autre est de somme égale soit à 0 (si n est pair), soit 1 (si n est impair).

Partie II. Dimensions de SMag_n et Mag_n

7. L'application $d : \mathsf{SMag}_n \to \mathbf{R}$ est une forme linéaire sur SMag_n, non nulle puisque $d(J) = n$. Donc SMag_n^0 est un hyperplan de Mag_n, ne contenant pas J. Et alors il est bien connu que ceci implique $\boxed{\mathsf{SMag}_n = \mathsf{SMag}_n^0 \oplus \mathrm{Vect}(J).}$

Rappel
Tout vecteur qui n'est pas dans un hyperplan engendre une droite qui est supplémentaire à l'hyperplan en question.

8. La première égalité se déduit directement de la question précédente.
Et la deuxième s'obtient par le même raisonnement, puisque $d_{|\mathsf{Mag}_n} : \mathsf{Mag}_n \to \mathbf{R}$ est une forme linéaire sur Mag_n, qui ne s'annule pas en J.

Et donc $\mathsf{Mag}_n = \mathsf{Mag}_n^0 \oplus \mathrm{Vect}(J)$, si bien que $\boxed{\dim \mathsf{Mag}_n = \dim \mathsf{Mag}_n^0 + 1.}$

9. Il est clair que ψ est linéaire. Elle est injective, car si $A \in \mathsf{SMag}_n^0$ possède tous les coefficients de ses $n-1$ premières lignes et premières colonnes nuls, alors pour que la somme de la première ligne soit nulle, il faut que $a_{1,n} = 0$.
Et de même, $a_{2,n} = \cdots = a_{n-1,n} = 0$, et en raisonnant sur les colonnes, $a_{n,1} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$.
Et alors pour que la somme de la dernière ligne soit nulle, nécessairement $a_{n,n} = 0$.
Ainsi, nous venons de prouver que $\operatorname{Ker} \psi = \{0_n\}$, si bien que ψ est injective.

Reste à voir qu'elle est surjective. Mais pour tout $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n-1} & -\sum\limits_{j=1}^{n-1} b_{1,j} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n-1} & -\sum\limits_{j=1}^{n-1} b_{2,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & -\sum\limits_{j=1}^{n-1} b_{n-1,j} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{i,1} & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{i,2} & \dots & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{i,n-1} & \sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n-1} b_{i,j} \end{pmatrix}$$

est bien dans SMag_n^0, et est évidemment un antécédent de B par ψ.
Donc $\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme}}$, si bien que $\boxed{\dim \mathsf{SMag}_n^0 = \dim \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R}) = (n-1)^2.}$

Et donc

$$\dim \mathsf{SMag}_n = \dim \mathsf{SMag}_n^0 + 1 = (n-1)^2 + 1 = \boxed{n^2 - 2n + 2.}$$

10. La famille $(A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est libre, puisque si on a des réels $\lambda_{i,j}$ tels que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \lambda_{i,j} A_{i,j} = 0_n$, alors par identification du coefficient (i,j), on a directement $\lambda_{i,j} = 0$.
Étant de cardinal $(n-1)^2 = \dim \mathsf{SMag}_n^0$, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathsf{SMag}_n^0.}$

Détails
$A_{i,j}$ a un coefficient égal à 1 en position (i,j), alors que pour $(k,\ell) \neq (i,j)$, $A_{k,\ell}$ a un coefficient nul en position (i,j).

11. Il est assez facile de constater que $\sigma : A \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} [A]_{k,n+1-k}$ est linéaire, et la linéarité de θ en découle.

Notons que $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $\operatorname{tr}(A_{1,1}) = 2$, et $\sigma(A_{1,1}) = -2$ donc $\theta(A_{1,1}) = (2, -2)$.

Pour $A_{2,2}$, il faut éventuellement mettre de côté le cas $n = 3$, pour lequel $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\theta(A_{2,2}) = (2, 1)$, et si $n \geqslant 4$, alors $\theta(A_{2,2}) = (2, 0)$.
Dans tous les cas, $\theta(A_{1,1})$ et $\theta(A_{2,2})$ ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de $\mathbf{R}^2$ et donc[12] une base de $\mathbf{R}^2$.
Donc $\operatorname{Im} \theta = \mathbf{R}^2$, et donc θ est surjective.
Par le théorème du rang, on a $\dim \mathsf{Smag}_n^0 = 2 + \dim \operatorname{Ker} \theta$.
Mais $\operatorname{Ker} \theta = \mathsf{Mag}_n^0$, si bien que

$$\dim \mathsf{Mag}_n^0 = \dim \mathsf{SMag}_n^0 - 2 = (n-1)^2 - 2 = n^2 - 2n - 1.$$

Et donc $\dim \mathsf{Mag}_n = \dim \mathsf{Mag}_n^0 + 1 = \boxed{n^2 - 2n.}$

[12] C'est une famille de cardinal 2.