Devoir surveillé 4

▸ Exercice 2 : une équation différentielle non linéaire

On note (E) l'équation différentielle : $xy' - |y| = x^2$.
La présence de la valeur absolue fait qu'il ne s'agit pas d'une équation différentielle linéaire.
Nous allons dans cet exercice chercher à la résoudre sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire chercher toutes les fonctions $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dérivables et telles que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xy'(x) - |y(x)| = x^2$.
Dans la suite, on note (E_+) l'équation différentielle $xy' + y = x^2$ et (E_-) l'équation différentielle $xy' - y = x^2$.

1. Soit I un intervalle ne contenant pas 0.
   a. Résoudre (E_+) sur I.
   b. Résoudre (E_-) sur I.

I. Résolution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$

2. Déterminer les solutions strictement positives de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbf{R}_-^*$.
4. Soit y une solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$. On suppose que y n'est pas strictement positive, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $y(x_0) \leqslant 0$.
   a. Prouver que y est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
   b. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $y(\alpha) = 0$.
   c. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x} & \text{si } x \leqslant \alpha \\ x(x-\alpha) & \text{si } x > \alpha \end{cases}$
   d. Déterminer la limite de y en 0^+.
5. Inversement, soit $\alpha > 0$ et soit y_α la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ y_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x} & \text{si } x \leqslant \alpha \\ x(x-\alpha) & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$
   Montrer que y_α est dérivable en α. En déduire que y_α est solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.
6. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.

II. Résolution de (E) sur $\mathbf{R}$.

7. Soit y une solution de (E) sur $\mathbf{R}$.
   a. Prouver qu'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $y(x) = x(x+\lambda)$.
   b. Montrer que $x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbf{R}$.
8. Prouver alors que (E) possède une unique solution sur $\mathbf{R}$.

▸ Exercice 3 : étude d'une suite.

Soit $a \in \mathbf{N}^*$. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$u_0 = a, \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

Partie I. Limite de (u_n).

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement positive et monotone.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Partie II. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Dans cette partie, on cherche à préciser la vitesse à laquelle (u_n) tend vers $+\infty$.
À cet effet, on définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln u_n$.

3. Prouver que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

   En déduire que quels que soient les entiers naturels n et k : $0 < v_{n+k+1} - v_{n+k} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.
4. Montrer que quels que soient les entiers naturels p et n :
$$0 < v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$
5. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.
6. À l'aide de l'inégalité de la question 4, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1$.
7. En déduire que $\alpha > 0$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} = 1$.
8. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $\delta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$. Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et que :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ 2\delta_n - 1 = \left(\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n\right)\exp(-\alpha 2^n).$$
9. En déduire que (δ_n) converge, et calculer sa limite.
10. Prouver qu'à partir d'un certain rang, $u_n = \lfloor \exp(2^n\alpha) \rfloor$.
    Cette relation est-elle vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$?

▸ Exercice 4 : étude d'une équation fonctionnelle.

Soit $p \in \mathbf{N}$ un entier fixé. Dans toute la suite, pour $f \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on note $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^2(n) = n + p$ si et seulement si p est pair.

1. Dans cette question, on suppose que p est pair. Donner un exemple de fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^2(n) = n + p$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $p \neq 0$, et on suppose qu'il existe $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^2(n) = n + p$, et on considère une telle fonction f.

2. Montrer que f est injective et qu'elle ne possède pas de point fixe.
3. Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$. Donner la valeur de $f^{2k}(n)$.
4. En déduire que pour tout $k \geqslant 2$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $f^k(n) \geqslant p$.
5. Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. On note respectivement q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de $f(n)$ par p, de sorte que $f(n) = qp + r$, avec $q \in \mathbf{N}$ et $r \in [\![0, p-1]\!]$.
   En utilisant les questions précédentes, prouver que si $q \neq 0$, alors $f(r) = n$.

6. En déduire que tout élément de $[\![0, p-1]\!]$ possède soit une image par f dans $[\![0, p-1]\!]$, soit un antécédent par f dans $[\![0, p-1]\!]$.
7. On définit une relation binaire notée $\sim$ sur $[\![0, p-1]\!]$ de la manière suivante :

$$\forall a, b \in [\![0, p-1]\!],\ a \sim b \Leftrightarrow (a = b \textbf{ ou } f(a) = b \textbf{ ou } f(b) = a).$$

   Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[\![0, p-1]\!]$.
8. Prouver que toute classe d'équivalence de la relation $\sim$ est de cardinal égal à deux.
9. En déduire que p est pair.

► Question subsidiaire

*Cette question hors barème est à n'aborder que si vous avez **très bien réussi** tout le reste.*

Soient $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. On suppose que :

- f est injective
- g est surjective
- $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) \leqslant g(n)$.

Prouver que f et g sont bijectives.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 4

▸ Exercice 2 : une équation différentielle non linéaire

1.a. Puisque $0 \notin I$, sur I l'équation (E_+) est équivalente à $y' + \dfrac{y}{x} = x$.
L'équation homogène associée, qui est $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ a pour ensemble de solutions

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Une solution particulière de (E_+) est $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^2$, si bien que l'ensemble des solutions de (E_+) est

$$\left\{x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{3}x^2,\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Solution part. Vu l'allure de l'équation, il n'est pas déraisonnable de chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda x^2$, et il est alors facile de vérifier qu'une telle fonction est solution si et seulement si $\lambda = \frac{1}{3}$.
Si on le remarque, il n'est donc pas nécessaire de procéder à une variation de la constante pour trouver une solution particulière.

1.b. Puisque $0 \notin I$, sur I (E_-) est équivalente à $y' - \dfrac{y}{x} = x$.
L'équation homogène associée, qui est $y' - \dfrac{y}{x} = 0$ a pour ensemble de solutions

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{\ln(x)},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\} = \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

De plus, $x \mapsto x^2$ en est une solution particulière[1].
Donc l'ensemble des solutions de (E_-) est $\left\{x \mapsto \lambda x + x^2,\ \lambda \in \mathbf{R}\right\} = \{x \mapsto x(x+\lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}\}$.

[1] Même remarque que ci-dessus : il n'est pas dur de «deviner» cette solution, elle s'obtient par une variation de la constante si on ne la voit pas.

I. Résolution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$

2. Soit $y : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable strictement positive.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $|y(x)| = y(x)$.
Et donc y est solution de (E) si et seulement si elle est solution de (E_-).
Donc les solutions strictement positives de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ sont les solutions strictement positives de (E_-) sur $\mathbf{R}_+^*$.
Mais si y est une solution de (E_-), alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $y(x) = x(x+\lambda)$.
Il s'agit donc d'une fonction polynomiale de degré 2, qui a pour racines[2] 0 et $-\lambda$, négative entre ses racines et positive à l'extérieur des racines. Donc elle est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.
Et donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions strictement positives de } (E) \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \text{ est } \{x \mapsto x(x+\lambda),\ \lambda \geqslant 0\}.}$

[2] Confondues si $\lambda = 0$

3. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$, strictement négatives, et soit y une telle solution.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $|y(x)| = -y(x)$, et donc y est solution de (E_+) sur $\mathbf{R}_+^*$.
Par la question 1.a, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $y(x) = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{1}{3}x^2$.
Et donc en particulier, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$. Ceci n'est pas compatible avec le fait que y soit à valeurs dans $\mathbf{R}_-^*$, et donc il n'existe pas de solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ qui ne prenne que des valeurs strictement négatives.

Remarque La question 1.a. s'applique puisque $\mathbf{R}_+^*$ est un intervalle ne contenant pas 0.

Détails Ce résultat est encore difficile à prouver pour l'instant faute de bonne définition de la limite d'une fonction, mais ne vous surprend pas sur les suites : une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée, et donc en particulier ne peut pas être à valeurs négatives. Les mêmes raisonnements restent valables pour les fonctions.

4.a. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $y'(x) = x^2 + |y(x)| \geqslant x^2 > 0$, et donc y est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

4.b. Comme expliqué à la question 3, y n'est pas à valeurs strictement négatives, donc il existe $x_1 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $y(x_1) \geqslant 0$.
Par ailleurs, nous avons supposé qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $y(x_0) \leqslant 0$. Par stricte croissance de y, on a donc $x_0 \leqslant x_1$.
Puisque y est dérivable, elle est continue, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [x_0, x_1]$ tel que $y(\alpha) = 0$.
Donc y s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}_+^*$. Et étant strictement croissante, y est injective, et donc un tel α est nécessairement unique.

4.c. Par stricte croissance de y, pour tout $x \leqslant \alpha$, $y(x) \leqslant 0$ et pour tout $x > \alpha$, $y(x) > 0$.
Et donc y est solution (E_-) sur l'intervalle $]0,\alpha]$.

Donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in]0,\alpha]$, $y(x) = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{x^2}{3}$.

Puisque par ailleurs, $y(\alpha) = 0$, on a donc $\dfrac{\lambda}{\alpha} + \dfrac{\alpha^2}{3} = 0$ et donc $\lambda = -\dfrac{\alpha^3}{3}$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,\alpha],\ y(x) = \dfrac{-\alpha^3}{3x} + \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{x^3-\alpha^3}{3x}.}$

De même, sur $[\alpha,+\infty[$, y est négative et donc est solution de (E_+).
Il existe donc $\mu \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \geqslant \alpha$, $y(x) = x(x+\mu)$.
Puisque $y(\alpha) = 0$, $\alpha(\alpha+\mu) = 0$, et donc $\mu = -\alpha$.
Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant \alpha,\ y(x) = x(x-\alpha).}$

4.d. On a donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-\alpha^3}{3x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\alpha^3}{3x} = -\infty$.

Signe
Il est important de se rappeler que $\alpha > 0$, et donc $-\alpha^3 < 0$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{\alpha\}$. Alors :

- <u>si $x < \alpha$</u> : $\dfrac{y_\alpha(x) - y_\alpha(\alpha)}{x-\alpha} = \dfrac{x^3-\alpha^3}{3x(x-\alpha)} = \dfrac{x^2+x\alpha+\alpha^2}{3x} \underset{x\to\alpha^-}{\longrightarrow} \dfrac{3\alpha^2}{3\alpha} = \alpha$.
- <u>si $x > \alpha$</u> : $\dfrac{y_\alpha(x) - y_\alpha(\alpha)}{x-\alpha} = x \underset{x\to\alpha^+}{\longrightarrow} \alpha$.

Identité remarquable

$x^3 - \alpha^3 =$
$(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to\alpha^+} \frac{y_\alpha(x)-y_\alpha(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha^-} \frac{y_\alpha(x)-y_\alpha(\alpha)}{x-\alpha} = \alpha$, si bien que $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{y_\alpha(x)-y_\alpha(\alpha)}{x-\alpha} = \alpha$.
Donc $\boxed{y_\alpha \text{ est dérivable en } \alpha \text{ avec } y_\alpha'(\alpha) = \alpha.}$
On a alors $\alpha y_\alpha'(\alpha) - |y_\alpha(\alpha)| = \alpha^2$.

Remarque
Ce calcul sert à vérifier que l'équation (E) est en particulier vérifiée pour $x = \alpha$.

Par ailleurs sur $]0,\alpha[$, y_α est négative[3] et donc elle est solution de (E) si et seulement si elle est solution de (E_+).
Or, y_α est bien de la forme obtenue à la question 1.a, donc[4] pour tout $x \in]0,\alpha[$, $xy_\alpha'(x) - |y_\alpha(x)| = x^2$.
Et sur le même principe, y_α est positive sur $]\alpha,+\infty[$, donc solution de (E) si et seulement si elle est solution de (E_-), ce qui est le cas puisqu'elle est de la forme obtenue à la question 1.b. Et donc pour tout $x \in]\alpha,+\infty[$, $xy_\alpha'(x) - |y_\alpha(x)| = x^2$.
En résumé, y_α est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xy_\alpha'(x) - |y_\alpha(x)| = x^2$, si bien que $\boxed{y_\alpha \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.}$

[3] Car si $x < \alpha$, $x^3 < \alpha^3$.

[4] Notons que ceci garantit notamment la dérivabilité de y_α sur $]0,\alpha[$.

6. La question 4 prouve que toutes les solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ qui ne sont pas strictement positives sont de la forme y_α, pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Et la question 5 prouve que toute fonction de la forme y_α, $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ sont des solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$. Et y_α est négative sur $]0,\alpha[$.
Donc l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ qui ne sont pas strictement positives est $\{y_\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$.
Ajoutons à cela le fait qu'il n'y a pas de solution strictement négatives, et que l'on connaît les solutions strictement positives, et on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ est

$$\{y_\alpha,\ \alpha > 0\} \cup \{x \mapsto x(x+\lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}_+\}.$$

II. Résolution de (E) sur $\mathbf{R}$.

7.a. En particulier, y est une solution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$, et donc ce qui a été dit à la partie I s'applique : soit y est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$, soit il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $y(x) = y_\alpha(x)$.
Dans le premier cas, la question 2 nous indique qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \geqslant 0$, $y(x) = x(x+\lambda)$.
Dans le second cas, la question 4.d nous dit que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} y(x) = -\infty$. Mais y étant dérivable, elle est continue sur $\mathbf{R}$, et notamment en 0, de sorte que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} y(x) = y(0) \in \mathbf{R}$, ce qui est absurde.
Et donc $\boxed{\text{il existe bien } \lambda \geqslant 0 \text{ tel que pour tout } x \geqslant 0,\ y(x) = x(x+\lambda).}$

7.b. Notons $z : x \mapsto y(-x)$. Alors z est dérivable sur $\mathbf{R}$ par composition de fonctions dérivables.

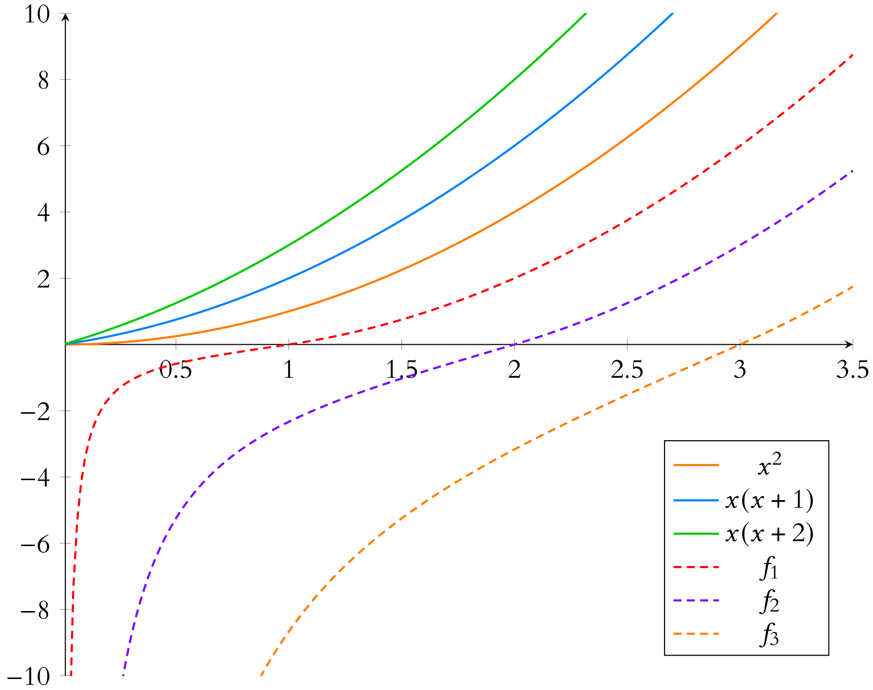

Figure 0.1 – Quelques solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$. En trait plein les solutions strictement positives, en pointillé les y_α.

Et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z'(x) = -y'(-x)$. Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$xz'(x) - |z(x)| = -xy'(-x) - |y(-x)| = (-x)^2 = x^2.$$

Et donc $\boxed{z \text{ est bien solution de } (E) \text{ sur } \mathbf{R}.}$

Détails
L'équation (E) est vérifiée pour tout $x \in \mathbf{R}$, et donc en particulier pour $-x$.

8. Soit y une solution de (E) sur $\mathbf{R}$, et soit $z : x \mapsto y(-x)$.
Puisque z est solution de (E) sur $\mathbf{R}$, il existe $\mu \geqslant 0$ tel que pour tout $x > 0$, $z(x) = x(x+\mu)$.
Et donc pour tout $x < 0$, $y(x) = z(-x) = -x(-x+\mu)$.

En résumé, il existe $\lambda, \mu \geqslant 0$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$y(x) = \begin{cases} x(x+\lambda) & \text{si } x > 0 \\ x(x-\mu) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ajoutons à cela le fait que $0 \times y'(0) - |y(0)| = 0^2$, et donc $y(0) = 0$.

Par ailleurs, y est dérivable en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0}$.
Mais nous savons calculer ces limites :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} x + \lambda = \lambda$$

et de même, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = -\mu$.
Donc $\lambda = -\mu$. Puisque λ et μ sont positifs, nécessairement $\lambda = \mu = 0$, si bien que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y(x) = x^2$.

⚠ Attention !
À ce stade, nous avons juste dit que (E) possède **au plus** une solution sur $\mathbf{R}$.
Reste à vérifier s'il s'agit bien d'une solution.

Inversement, la fonction $y : x \mapsto x^2$ étant positive, il est aisé de vérifier qu'elle satisfait (E) sur $\mathbf{R}$ tout entier, et donc qu'il s'agit de $\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ sur } \mathbf{R}.}$

▸ Exercice 3 : étude d'une suite (d'après concours Ecricome ECS 2003)

Partie I. Limite de (u_n)

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 \geqslant 0$, si bien que $u_{n+1} \geqslant u_n$, et donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$
Mais alors en particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant u_0 > 0$, si bien que (u_n) est à valeurs strictement positives.

Remarque
Notons que la stricte positivité de (u_n) permet de prouver que (u_n) est strictement croissante.

2. Par le théorème de la limite monotone, (u_n) est soit convergente, soit de limite égale à $+\infty$.
Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un réel ℓ. Alors nécessairement $\ell \geqslant u_0 = a$, et donc $\ell > 0$.
Mais par ailleurs, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et $u_n + u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell^2$, si bien que par unicité de la limite, $\ell = \ell + \ell^2$, et donc $\ell = 0$, ce qui est absurde puisque $\ell > 0$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Alternative
Une récurrence facile prouverait que puisque $u_0 \in \mathbf{N}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{N}$.
Et un lemme du cours nous garantit alors que toute suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbf{N}$ (c'est-à-dire une extractrice !) tend vers $+\infty$.

Partie II. Comportement asymptotique de $(u_n)_n$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\ln(u_n + u_n^2) - 2\ln(u_n)\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{u_n+u_n^2}{u_n^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).} \end{aligned}$$

En particulier, pour $n, k \in \mathbf{N}$, on a

$$v_{n+k+1} - v_{n+k} = \frac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+k}}\right) > 0.$$

Mais par croissance de (u_n), $u_{n+k} \geqslant u_n$ et donc $\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+k}}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.
Et donc on en déduit que pour tous $k, n \in \mathbf{N}$,

$$0 < v_{n+k+1} - v_{n+k} \leqslant \frac{1}{2^{n+k}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$

4. Soient $n, p \in \mathbf{N}$. On a donc

$$\begin{aligned} v_{n+p+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{p}(v_{n+1+k} - v_{n+k}) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^{n+k+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^p} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right). \end{aligned}$$

Somme télescopique.

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Et de même, $v_{n+p+1} - v_n > 0$ puisqu'il s'agit d'une somme de termes tous strictement positifs.

5. Prenons $n = 0$ dans l'inégalité de la question précédente. Il vient alors : $\forall k \in \mathbf{N}$, $v_{k+1} \leqslant v_0 + \ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$.

Puisque par ailleurs $v_0 \leqslant v_0 + \ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$, on a bien : $\forall k \in \mathbf{N}$, $v_k \leqslant v_0 + \ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)$, si bien que $\boxed{(u_n) \text{ est majorée.}}$

Par ailleurs, (v_n) est croissante d'après l'inégalité de la question 3, et donc par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \alpha.}$

Remarque
Le passage à la limite est légitime seulement car il a déjà été prouvé que (v_n) converge, et donc que

$$\lim_{k\to+\infty} v_{n+k+1}$$

existe.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Dans l'inégalité de la question 4 passons à la limite lorsque k tend vers $+\infty$

$$0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$

On en déduit que

$$\ln(u_n) \leqslant 2^n\alpha \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) + \ln(u_n) = \ln(u_n+1).$$

Et donc par croissance de l'exponentielle, $\boxed{u_n \leqslant \exp\left(2^n\alpha\right) \leqslant u_n + 1.}$

Positivité
La positivité de α aurait pu être prouvée plus tôt : c'est la limite d'une suite croissante et à valeurs strictement positives à partir d'un certain rang n_0. Et donc

$$\alpha \geqslant v_{n_0} > 0.$$

7. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\alpha 2^n) = +\infty$, ce qui n'est possible que pour $\alpha > 0$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant \dfrac{\exp\left(\alpha 2^n\right)}{u_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{u_n}$, si bien que par le théorème d'encadrement, $\dfrac{\exp\left(\alpha 2^n\right)}{u_n}$ possède une limite, égale à 1.

Et donc par passage à l'inverse, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\exp\left(\alpha 2^n\right)} = 1.}$

Interprétation
Ceci signifie que (u_n) tend vers $+\infty$ à peu près à la même vitesse que $\exp\left(\alpha 2^n\right)$, c'est-à-dire très vite.

8. L'encadrement de la question 6 prouve directement que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \delta_n \leqslant 1$, donc (δ_n) est bornée.

Soit à présent $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n &= \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - u_{n+1} + \left(\exp\left(\alpha 2^n\right) - u_n\right)^2 - \exp\left(\alpha 2^n\right) + u_n \\
&= \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - \cancel{u_n} - \cancel{u_n^2} + \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2\exp\left(\alpha 2^n\right)u_n + \cancel{u_n^2} - \exp\left(\alpha 2^n\right) + \cancel{u_n} \\
&= 2\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2\exp\left(\alpha 2^n\right)u_n - \exp\left(\alpha 2^n\right) \\
&= \exp\left(\alpha 2^n\right)\left(2\exp\left(\alpha 2^n\right) - 2u_n - 1\right) \\
&= \exp\left(\alpha 2^n\right)\left(2\delta_n - 1\right).
\end{aligned}$$

Détails
$\exp\left(\alpha 2^n\right)^2 = \exp\left(2\alpha 2^n\right) = \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right)$.

Après multiplication par $\exp\left(-\alpha 2^n\right)$, on obtient bien l'égalité annoncée.

9. Puisque (δ_n) est bornée, il en est de même de $(\delta_{n+1}+\delta_n^2-\delta_n)_n$, et puisque $\exp\left(-\alpha 2^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors[5] $2\delta_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Et donc $\boxed{\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.}$

Remarque : puisque u_n est un entier, ceci signifie que lorsque n est grand, $\exp\left(\alpha 2^n\right)$ est proche d'un demi-entier.

[5] Rappelons que le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle tend vers 0.

10. Puisque $\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\delta_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{4}$.

Soit n_0 un tel entier, et soit $n \geqslant n_0$.

$$\exp\left(\alpha 2^n\right) - u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$$

si bien que $u_n \leqslant \exp\left(\alpha 2^n\right) < u_n + 1$.

Puisque u_n est entier[6], pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \left\lfloor \exp\left(\alpha 2^n\right)\right\rfloor$.

[6] Ce qui se prouverait par une récurrence facile.

Toute fois ce raisonnement ne nous donne une information que pour n suffisamment grand, et ne saurait suffire à prouver que l'égalité ci-dessus est valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Notons que puisque nous savons déjà que $u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1$, il faut juste réussir à écarter le cas où $\exp(\alpha 2^n) = u_n + 1$.
Soit encore réussir, à prouver que $\delta_n < 1$. Nous allons prouver que c'est toujours le cas.
Soit donc $n \in \mathbf{N}$. La relation de la question 8 nous indique que

$$\delta_n = \frac{1}{2} + \frac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2\exp(\alpha 2^n)}.$$

Mais puisque $\delta_n \in [0,1]$, $\delta_n^2 - \delta_n \leqslant 0$.
On en déduit que $\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n \leqslant 1$ et donc que $\dfrac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Or $\exp(\alpha 2^n) > e^0 = 1$, si bien que $\dfrac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2\exp(\alpha 2^n)} < \frac{1}{2}$, et donc $\delta_n < 1$.
Ainsi, $u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n) < u_n + 1$, et donc $\boxed{u_n = \lfloor \exp(\alpha 2^n) \rfloor.}$

▸ Exercice 4 : existence de solutions à une équation fonctionnelle

1. Puisque p est pair, considérons un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $p = 2k$.
Alors l'application $f : n \mapsto n + k$ convient puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$f^2(n) = f(n+k) = (n+k) + k = n + 2k = n + p.$$

2. L'application $\tau_p : n \mapsto n+p$ est clairement injective, et $f \circ f = \tau_p$, si bien que $\boxed{f \text{ est injective.}}$

Supposons par l'absurde que f possède un point fixe n_0.
Alors $f(n_0) = n_0$, et donc $f^2(n_0) = n_0$.
Or $f^2(n_0) = n_0 + p \neq n_0$, d'où une contradiction. Et donc $\boxed{f \text{ ne possède pas de point fixe.}}$

Rappel — Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous savons déjà que $f^2(n) = n + p$.
Donc $f^4(n) = f^2(f^2(n)) = f^2(n+p) = n+2p$. Puis $f^6(n) = f^2(f^4(n)) = (n+2p)+p = n+3p$, etc.
Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$ que $f^{2k}(n) = n + kp$.
Par hypothèse, la propriété est vraie au rang 1.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^{2k}(n) = n + kp$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}$. On a donc

$$f^{2(k+1)}(n) = f^2(f^{2k}(n)) = f^2(n+kp) = (n+kp) + p = n + (k+1)p.$$

Et donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N}^*, f^{2k}(n) = n + kp.}$

⚠ Attention ! — On peut écrire $f^{2(k+1)} = f^2 \circ f^{2k}$ ou $f^{2(k+1)} = f^{2k} \circ f^2$.
Si on travaille à n fixé, il est important de choisir la première option car notre hypothèse de récurrence ne nous dira rien de $f^{2k}(f^2(n)) = f^{2k}(n+p)$.
Le problème n'existe pas si on prouve par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, f^{2k}(n) = n + kp.$$

4. Soit $k \geqslant 2$ et $n \in \mathbf{N}$.
▸ Si k est pair, alors la question précédente prouve que $f^k(n) = n + \frac{k}{2}p \geqslant p$ car $\frac{k}{2} \geqslant 1$.
▸ Si k est impair, alors $k \geqslant 3$, si bien que $k-1$ est un entier pair plus grand que 2. Et donc $f^k(n) = f^{k-1}(f(n)) = f(n) + \frac{k-1}{2}p \geqslant p$.

Dans tous les cas, on a bien prouvé que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, f^k(n) \geqslant p.}$

5. Supposons que $q \geqslant 1$. Alors $f(n) = pq + r = f^{2q}(r)$, si bien que par injectivité de f, $n = f^{2q-1}(r)$, avec $2q - 1 \geqslant 1$.
Puisque $n < p$, la question précédente prouve qu'on ne peut pas avoir $2q - 1 \geqslant 2$, si bien que $2q - 1 = 1$, et donc $q = 1$.
Et alors $n = f^{2q-1}(r)$ signifie bien que $\boxed{n = f(r).}$

6. Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. Avec les notations précédentes, si $f(n) \notin [\![0, p-1]\!]$, alors $f(n) \geqslant p$, si bien que $q \geqslant 1$. Et donc $n = f(r)$, si bien que r est un antécédent[7] de n par f qui se trouve dans $[\![0, p-1]\!]$.
Donc f possède soit une image dans $[\![0, p-1]\!]$, soit un antécédent dans ce même ensemble.

En revanche si n possède un antécédent s dans $[\![0, p-1]\!]$, alors $f(n) = f^2(s) = s + p \geqslant p$, si bien que $f(n)$ n'est pas dans $[\![0, p-1]\!]$.
Donc n possède soit une image par f dans $[\![0, p-1]\!]$, soit un antécédent par f dans $[\![0, p-1]\!]$, et ces deux conditions sont mutuellement exclusives.

[7] Nécessairement unique par injectivité de f.

7. Soit $a \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $a = a$, et donc $a \sim a$.
Donc $\sim$ est réflexive.
Soient $a, b \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $a \sim b$.
Si $a = b$, alors $b = a$ et donc $b \sim a$. Si $f(a) = b$, alors $b \sim a$. Et si $a = f(b)$, alors $b \sim a$.
Donc $\sim$ est symétrique.

Soient $a, b, c \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $a \sim b$ et $b \sim c$.
Il est évident que si $a = b$ ou si $b = c$, alors $a \sim c$.
Traitons donc le cas où $a \neq b$ et $b \neq c$. Par conséquent, il y a 4 cas possibles :
► si $f(a) = b$ et $f(b) = c$: alors $c = f^2(a) = a + p \geqslant p$, ce qui n'est tout simplement pas possible[8].
► si $f(a) = b$ et $b = f(c)$: alors par injectivité de f, $a = c$, si bien que $a \sim c$.
► si $a = f(b)$ et $b = f(c)$: alors $a = f^2(c) \geqslant p$, donc ce cas n'est pas possible.
► si $a = f(b)$ et $c = f(b)$: alors $a = c$, et donc $a \sim c$.

[8] Car $c \in [\![0, p-1]\!]$.

Ainsi, on a bien prouvé que $a \sim b$ et $b \sim c \Rightarrow a \sim c$, et donc $\sim$ est transitive, et donc est bien $\boxed{\text{une relation d'équivalence sur } [\![0, p-1]\!].}$

Remarque
Les détails de la preuve montrent que si trois éléments sont en relation, alors deux au moins sont égaux. Ceci signifie que les classes d'équivalence sont de cardinal au plus 2 : elles ne peuvent pas contenir trois éléments distincts.

8. Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. Alors par définition de $\sim$, les éléments de sa classe d'équivalence, que l'on notera $\mathrm{cl}(n)$, sont soit n, soit l'image de n par f, soit antécédent de n par f.
D'après la question 6, n possède soit une image par f dans $[\![0, n-1]\!]$, soit un antécédent par f dans $[\![0, p-1]\!]$.
► Si $f(n) \in [\![0, p-1]\!]$: alors nous avons déjà dit que f n'a pas d'antécédent dans $[\![0, p-1]\!]$, et donc $\mathrm{cl}(n) = \{n, f(n)\}$.
Ces deux élément sont bien distincts puisque n n'est pas un point fixe de f, et donc $\mathrm{cl}(n)$ est de cardinal 2.
► Si $f(n) \notin [\![0, p-1]\!]$: alors $n = f(r)$, où r est le reste de la division euclidienne de $f(n)$ par p. Et par injectivité de f, r est l'unique antécédent de n par f, si bien que $\mathrm{cl}(n) = \{n, r\}$.
Mais encore une fois, f ne possédant pas de point fixe, $r \neq f(r) = n$, et donc $\mathrm{cl}(n)$ est de cardinal 2.

Donc $\boxed{\text{toute classe d'équivalence de } \sim \text{ est de cardinal 2.}}$

9. Nous savons que les classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de $[\![0, p-1]\!]$.
Notons alors A l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de $\sim$, qui est un ensemble fini puisque $[\![0, p-1]\!]$ est fini.
Alors $[\![0, p-1]\!] = \bigcup_{X \in A} X$. Les classes d'équivalence étant deux à deux disjointes,

$$p = \mathrm{Card}([\![0, p-1]\!]) = \sum_{X \in A} \mathrm{Card}(X) = \sum_{X \in A} 2 = 2\mathrm{Card}(A).$$

Et donc $\boxed{p \text{ est pair.}}$