Devoir surveillé 2

▸ Exercice 1 : calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$ — 30 min

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, on note $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$.

1. Prouver que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}(2t) = \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t)$ et que $\mathrm{sh}(2t) = 2\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{th}(2t)$ uniquement en fonction de $\mathrm{th}(t)$.
3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{th}(t)}{t}$.
4. En utilisant la question 2, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$\ln\left(1+\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).$$
5. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n(x) = \ln\left(2^n \mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\mathrm{th}(x))$.
6. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ fixé. En utilisant les questions 5 et 3, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

▸ Exercice 2 : Fonction argument sécante hyperbolique — 1h

Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser.
   On note alors $f^{-1} : I \to [0,+\infty[$ la bijection réciproque de f.
2. a. Pour $x \in \mathbf{R}$, justifier que $\mathrm{ch}(2x) = 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 1$.

   b. En déduire que pour tout $x \in I$, $2f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right) = f^{-1}(x)$.
3. Déterminer $\mathrm{ch}(f^{-1}(x))$ et $\mathrm{sh}(f^{-1}(x))$ en fonction de x.
4. Prouver que f^{-1} est dérivable sur $I \setminus \{1\}$ (I privé de 1) et pour $x \in I \setminus \{1\}$ exprimer $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x.
5. Pour $y \in I$ fixé, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \geqslant 0$. En déduire la valeur de $f^{-1}(y)$ et retrouver le résultat de la question 4.
6. Retrouver alors la formule de la question 2.b.

▸ Exercice 3 : Nombres de Catalan — 1h

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note successivement

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}.$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ainsi que S_0, S_1, S_2 et S_3. Que remarquez-vous ?
2. a. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in \mathbf{N}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k}$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ 2T_n = nS_n$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ (n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$.
5. Soit $n \in \mathbf{N}$. En utilisant les questions précédentes, montrer que :
$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$
   puis que :
$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.$$
6. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = a_{n+1}$.
7. En utilisant la question précédente, retrouver le résultat de la question 2.b.

▸ Problème : Approximations rationnelles de th et irrationalité de e — *1h30*

1. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$, vérifiant $f(0) = g(0) = 0$ et telles que : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant g'(x)$.
   Étudier le signe des fonctions $f+g$ et $g-f$ sur $\mathbf{R}_+$, et en déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|f(x)| \leqslant g(x)$.

Dans la suite, on définit deux suites $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}_+$ en posant :
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \Big(P_0(x) = 0,\ P_1(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2}(x) = (2n+3)P_{n+1}(x) + x^2 P_n(x)\Big).$$
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \Big(Q_0(x) = 1,\ Q_1(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ Q_{n+2}(x) = (2n+3)Q_{n+1}(x) + x^2 Q_n(x)\Big).$$

2. Déterminer les fonctions P_2 et Q_2.
3. a. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, les coefficients des fonctions polynomiales P_n et Q_n sont des entiers naturels.
   b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer $P_n(0)$ et $Q_n(0)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $Q_n(x) \geqslant \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+$, on pose $f_n(x) = Q_n(x)\,\mathrm{sh}(x) - P_n(x)\,\mathrm{ch}(x)$.
On constate qu'alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f_{n+2}(x) = (2n+3)f_{n+1}(x) + x^2 f_n(x)$.

4. a. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est dérivable.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \geqslant 0$, $f'_{n+1}(x) = -x f_n(x)$.
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est strictement monotone sur $\mathbf{R}_+$ et que : $\forall x > 0$, $|f_n(x)| > 0$.
5. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \geqslant 0$, on note $g_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}\,\mathrm{sh}(x)$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \geqslant 0$, $x g_n(x) \leqslant g'_{n+1}(x)$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$, puis que pour tout $x > 0$,
$$0 < \left|\mathrm{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
   c. En utilisant ce qui précède, déterminer un rationnel r tel que $|\,\mathrm{th}(1) - r| \leqslant 10^{-2}$.
6. Le but de cette question est de prouver que le réel th(1) est irrationnel. On raisonne par l'absurde, en supposant que $\mathrm{th}(1) \in \mathbf{Q}$, et on considère deux entiers $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $\mathrm{th}(1) = \frac{p}{q}$.
   a. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 < |pQ_n(1) - qP_n(1)| \leqslant \dfrac{q}{2^n n!}$.
   b. En déduire une contradiction.
   c. Prouver, à l'aide de ce qui précède, que e est irrationnel.
7. **Question subsidiaire** *(à n'aborder que si vous avez très bien réussi tout le reste)*.
   Prouver que pour tout rationnel strictement positif r, $\ln(r) \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow r = 1$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

▸ Exercice 1 : calcul de $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$

1. Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2(t)+\operatorname{sh}^2(t) &= \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2t}+2+e^{-2t}+e^{2t}-2+e^{-2t}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{2t}+2e^{-2t}\right) = \boxed{\operatorname{ch}(2t).}\end{aligned}$$

Et de même, en utilisant une identité remarquable,

$$2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t) = \frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)\left(e^t-e^{-t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right) = \boxed{\operatorname{sh}(2t).}$$

Rédaction : Pour prouver un résultat pour tout t dans $\mathbf{R}$, la rédaction doit **impérativement** commencer par prendre un tel t, donc par «soit $t \in \mathbf{R}$».

2. Il vient donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{th}(2t) = \frac{\operatorname{sh}(2t)}{\operatorname{ch}(2t)} = \frac{2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)+\operatorname{sh}^2(t)} = \frac{2\operatorname{th}(t)\operatorname{ch}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)\left(1+\frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}\right)} = \boxed{\frac{2\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{th}^2(t)}.}$$

3. Puisque $\operatorname{th}(0)=0$, on a donc, pour $t \neq 0$, $\frac{\operatorname{th}(t)}{t} = \frac{\operatorname{th}(t)-\operatorname{th}(0)}{t-0}$.
Or, nous savons que th est dérivable en 0 et que $\operatorname{th}'(0) = 1-\operatorname{th}^2(0) = 1$. Et donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{th}(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{th}(t)-\operatorname{th}(0)}{t-0} = \operatorname{th}'(0) = \boxed{1.}$$

Rappel : Par **définition**, le nombre dérivé de th en 0 est égal à cette limite (celle de son taux d'accroissement).

4. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $k \in \mathbf{N}^*$. Alors d'après la question 2,

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) = \operatorname{th}\left(2\frac{x}{2^k}\right) = \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}.$$

Et donc en passant au logarithme[1],

$$\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right) = \ln\left(\frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}\right) = \ln(2)+\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right).$$

On en déduit alors aisément la relation demandée :

$$\boxed{\ln\left(1+\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2)+\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).}$$

[1] Ce qui est légitime puisque la fonction th est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$.
Sommons les relations obtenues à la question précédente pour k allant de 1 à n. Alors

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(2)+\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right]\\ &= n\ln(2) + \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\right]\\ &= \ln(2^n) + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^0}\right)\right)\\ &= \boxed{\ln\left(2^n\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\operatorname{th}(x)).}\end{aligned}$$

Somme télescopique.

6. Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mais alors, par la question 3, on a $\dfrac{\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Et donc en multipliant par x, $2^n \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\frac{1}{x}2^n\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Et alors par continuité du ln en x, on en déduit que $\ln\left(2^n\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x)$.

Et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \ln(x) - \ln(\operatorname{th}(x)) = \ln\left(\frac{x}{\operatorname{th}(x)}\right).}$

Remarque

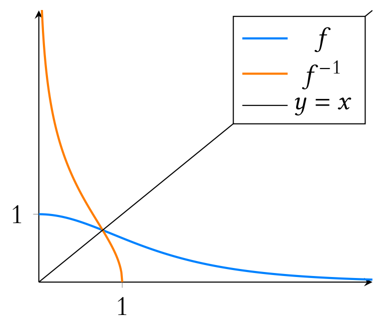
Nous noterons en fin d'année cette limite avec une somme dont la borne supérieure est infinie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$$

Pour l'instant, je ne vous autorise pas l'emploi de cette notation, qui nécessite quelques précautions...

▸ Exercice 2 : fonction argument sécante hyperbolique

1. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ car inverse de la fonction[2] ch, que nous savons croissante.
Par ailleurs elle est continue[3] et vérifie $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection (strictement décroissante) de $\mathbf{R}_+$ sur $]0,1]$.



[2] À valeurs strictement positives.

[3] Car ch l'est.

2.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$2\operatorname{ch}^2(x) - 1 = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x).$$

2.b. Soit $x \in I$. Commençons par noter que $\frac{2x}{1+x} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x \leqslant 1 + x \Leftrightarrow x \leqslant 1$.
Cette dernière condition étant bien vérifiée, on a $0 < \frac{2x}{1+x} \leqslant 1$ et donc $0 < \sqrt{\frac{2x}{1+x}} \leqslant 1$ de sorte que $\sqrt{\frac{2x}{1+x}} \in I$.

Et donc $f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right)$ est bien défini.

On a alors $\cdot\operatorname{ch}\left(2f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right)\right) = 2\operatorname{ch}^2\left(f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right)\right) - 1$.
Mais pour tout $y \in I$, $f\left(f^{-1})(y)\right) = y$ et donc $\operatorname{ch}\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{y}$.
En particulier,

$$2\operatorname{ch}^2\left(f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right)\right) = 2\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right)^2} = \frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Et donc

$$f\left(2f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right)\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x} - 1} = x.$$

Ainsi, $2f^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x}}\right)$ est l'unique[4] antécédent de x par f et donc est égal à $f^{-1}(x)$.

[4] Car on sait que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur I.

3. Soit $x \geqslant 0$. On a $f(f^{-1})(x) = x$, et donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(f^{-1}(x))} = x$. Soit encore $\boxed{\operatorname{ch}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x}.}$
Mais nous savons que pour tout $x \in I$, $\operatorname{ch}^2\left(f^{-1}(x)\right) - \operatorname{sh}^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1$, soit encore

$\text{sh}^2\left(f^{-1}(x)\right) = \text{ch}^2\left(f^{-1}(x)\right) - 1 = \dfrac{1}{x^2} - 1.$
Puisque f^{-1} est à valeurs positives, $\text{sh}\left(f^{-1}(x)\right) \geqslant 0$, et donc

$$\text{sh}\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \boxed{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.}$$

Attention !
Sans précaution sur le signe, on ne peut qu'affirmer

$$\left|\text{sh}(f^{-1}(x))\right| = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}.$$

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)}$.
En particulier, on a $f'(f^{-1})(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \underbrace{f(0)}_{=1}.$

Détails
Puisque $f(0) = 1$, on a donc $f^{-1}(1) = 0$.

Donc f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$, et pour $x \in]0,1[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{\text{ch}^2(f^{-1}(x))}{\text{sh}(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{x^2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.}$$

5. Soit $y \in]0,1]$ fixé. Alors pour $x \geqslant 0$, on a

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{\text{ch}(x)} = y \Leftrightarrow \text{ch}(x) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = \frac{2}{y} \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{2}{y}e^x + 1 = 0.$$

Si on note $X = e^x$, alors $f(x) = y \Leftrightarrow X^2 - \dfrac{2}{y}X + 1 = 0$.

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = \dfrac{4}{y^2} - 4 = \dfrac{4-4y^2}{y^2} > 0$.

Les deux racines sont alors $X_1 = \dfrac{\frac{2}{y} + \frac{2}{y}\sqrt{1-y^2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.
Il est clair que $X_1 > 1$ et nous pourrions prouver que $X_2 < 1$. Mais notons plus simplement que puisque nous savons déjà f bijective, nous savons que l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution positive, et donc qu'une seule des deux racines ci-dessus peut être plus grande que 1.
Et donc X_1 et X_2 ne peuvent être toutes deux supérieures ou égales à 1, faute de quoi $y = f(x)$ posséderait deux solutions distinctes dans $\mathbf{R}_+$ qui sont $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$.

Détails
On s'intéresse à la valeur 1 puisque $X = e^x$ doit être supérieur ou égal à 1.

Donc l'unique solution positive à $y = f(x)$ est $\ln(X_1) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$.

On en déduit donc que la bijection réciproque de f est donnée par

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \end{array} \right. .$$

Vérification ?
Vous pouvez essayer de calculer $f(f^{-1}(x))$ afin de constater que l'expression que nous venons de trouver est la bonne.

Puisque la fonction racine n'est pas dérivable en 0, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]0,1[$, mais pas sur $]0,1]$ (ou plutôt : on ne sait rien de la dérivabilité en 1).
Et alors par quotient et composition de fonctions dérivables, f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$.

La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - 1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = -\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ et donc pour tout $x \in]0,1[$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} = \frac{-x}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}.}$$

6. Soit $x \in]0,1[$. Alors on a

$$2f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right) = 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{2x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}\right) = 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}\right) = \ln\left(\left(\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}\right)^2\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1-x}{1+x}}{\frac{2x}{1+x}}\right) = \ln\left(\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{2x}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right).}$$

▸ Exercice 3 : Nombres de Catalan

1. On a donc $a_0 = \binom{0}{0} = \boxed{1}$, $a_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \boxed{1}$, $a_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \boxed{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \boxed{5}$, $a_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \boxed{14}$.
On en déduit alors que

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} a_0 a_0 - k = a_0 = \boxed{1},\ S_1 = a_0a_1 + a_1a_0 = \boxed{2},\ S_2 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = \boxed{5}$$

et $S_3 = a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = \boxed{14}$.
On remarque alors que $S_3 = a_4$, et que $S_2 = a_3$, $S_1 = a_2$ et $S_0 = a_1$. Autrement dit que pour $k \leqslant 3$, $S_k = a_{k+1}$.

2.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \boxed{a_n.}\end{aligned}$$

2.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque $\binom{2n}{n} \in \mathbf{N}$ et $\binom{2n}{n+1} \in \mathbf{N}$, on a $a_n \in \mathbf{Z}$. Et puisque par ailleurs il est évident que $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \geqslant 0$, alors $\boxed{a_n \in \mathbf{N}.}$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Dans la somme définissant T_n, réalisons le changement d'indice $i = n - k$.
On a alors

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} (n-i)a_{n-i}a_{n-(n-i)} = \sum_{i=0}^{n} (n-i)a_{n-i}a_i = \sum_{k=0}^{n} (n-k)a_k a_{n-k}.$$

Bornes
Lorsque k varie entre 0 et n, $i = n - k$ varie de n à 0.

Et donc $2T_n = \sum_{k=0}^{n} ka_ka_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_ka_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} na_ka_{n-k} = n\sum_{k=0}^{n} a_ka_{n-k} = \boxed{nS_n.}$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a alors

$$\begin{aligned}(n+2)a_{n+1} &= (n+2)\frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\frac{(2n)!}{n!n!}\\ &= 2(2n+1)\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = 2(2n+1)\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \boxed{2(2n+1)a_n.}\end{aligned}$$

5. On a donc

$$\begin{aligned}T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)a_ka_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_ka_{n+1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(n+2-k)a_ka_{n+1-k}\\ & a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(n+2-k)a_ka_{n+1-k}\\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k(n-k+2)a_{n-k+1}\\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k 2(2(n-k)+1)a_{n-k}\\ &= a_{n+1} + 2\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(2j+1)a_j\end{aligned}$$

On isole le terme correspondant à $k = n + 1$.

C'est la question 4.

Chgt d'indice
$j = n - k$.

$$\begin{aligned}
&= a_{n+1} + 4\sum_{j=0}^{n} j a_j a_{n-j} + 2\sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j}\\
&= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n\\
&= \boxed{a_{n+1} + 2nS_n + S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.}
\end{aligned}$$

En notant alors que par la question 3, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_{n+1} = \frac{n+1}{2}S_{n+1}$, on en vient à $\frac{n+1}{2}S_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$, et donc $\boxed{\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.}$

6. Prouvons par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}$ que $S_n = a_{n+1}$.
Puisque $S_0 = 1 = a_1$, la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $S_n = a_{n+1}$.
Alors $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$.
Mais par la question 4,

$$(n+3)a_{n+2} = 2(2(n+1)+1)a_{n+1} = 2(2n+3)a_{n+1} = (n+3)S_{n+1} = (n+3)a_{n+2},$$

si bien que $S_{n+1} = a_{n+2}$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ S_n = a_{n+1}.}$

7. Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $a_n \in \mathbf{N}$.
On a évidemment $a_0 = 1 \in \mathbf{N}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$, et supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbf{N}$.
Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $n - k \in [\![0, n]\!]$, et donc $a_{n-k} \in \mathbf{N}$, si bien que $a_k a_{n-k} \in \mathbf{N}$.
Et donc $a_{n+1} = S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \in \mathbf{N}$.
Ainsi, par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ a_n \in \mathbf{N}.}$

Commentaires *: les nombres a_n étudiés dans ce problème sont appelés les nombres de Catalan, et ils interviennent dans plusieurs problèmes de dénombrement. Par exemple a_n est le nombre de manières de parenthèses correctement un produit de $n+1$ lettres, où l'on n'autorise que deux termes dans chaque produit. Par exemple, les $a_3 = 5$ parenthésages d'un mot de 4 lettres sont*

$$(xy)(zt),\ ((xy)z)t,\ (x(yz))t,\ x((yz)t) \text{ et } x(y(zt)).$$

Exercice
Vous pouvez essayer de prouver que le nombre b_n de bons parenthésages d'un mot de $n+1$ lettres vérifie

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}.$$

▸ Problème : approximations rationnelles de th et irrationalité de e

1. Puisque f et g sont dérivables, il en est de même des deux fonctions $f+g$ et $g-f$, et on a alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ et $(g-f)'(x) = g'(x) - f'(x)$.
Mais puisque $|f'(x)| \leqslant g'(x)$, alors $f'(x) \leqslant |f'(x)| \leqslant g'(x)$, si bien que $g'(x) - f'(x) \geqslant 0$.
Et de même, $-f'(x) \leqslant |f'(x)| \leqslant g'(x)$ et donc $g'(x) + f'(x) \geqslant 0$.
Ainsi, $f+g$ et $g-f$ sont toutes deux croissantes sur $\mathbf{R}_+$, et puisqu'elles s'annulent en 0, elles sont positives sur $\mathbf{R}_+$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $-f(x) \leqslant g(x)$. Et par conséquent[5] $\boxed{|f(x)| \leqslant g(x).}$

2. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$P_2(x) = P_{0+2}(x) = (2\times 0+3)P_{0+1}(x) + x^2P_0(x) = \boxed{3x} \text{ et } Q_2(x) = 2Q_1(x) + x^2Q_0(x) = \boxed{3+x^2.}$$

3.a. Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^*$ en notant $\mathscr{P}(n)$: «les coefficients de P_n et de Q_n sont des entiers naturels».
Étant données les expressions de P_0, Q_0, P_1 et Q_1 données dans l'énoncé, il est évident que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies.
Soit alors $p \in \mathbf{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient de degré inférieur ou égal à p, et notons $a_0, \dots, a_p$ (resp. $b_0, \dots, b_p$) les coefficients[6] de P_n (respectivement P_{n+1}) de sorte que pour tout $x \geqslant 0$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \text{ et } P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k.$$

[5] Rappelons que $|f(x)|$ est égal soit à $f(x)$ soit à son opposé, qui sont tous deux plus petits que $g(x)$.

[6] Qui sont donc dans $\mathbf{N}$.

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$P_{n+1}(x) = (2n+3)\sum_{k=0}^{p} b_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = \underbrace{(2n+3)b_0}_{\in\mathbf{N}} + \underbrace{(2n+3)b_1}_{\in\mathbf{N}} x + \sum_{k=2}^{p} \underbrace{\left((2n+3)b_k + a_{k-2}\right)}_{\in\mathbf{N}} x^k.$$

Et donc P_{n+2} est bien polynomiale[7], à coefficients dans $\mathbf{N}$.
On prouve exactement sur le même principe que Q_{n+2} est à coefficients entiers naturels.
Donc par le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n et Q_n sont à coefficients dans $\mathbf{N}$.

[7] Ce qui avait été admis, mais est désormais prouvé...

3.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $P_{n+2}(0) = (2n+3)P_{n+1}(0) + 0^2 P_n(0) = (2n+3)P_{n+1}(0)$.
Puisque $P_0(0) = P_1(0) = 0$, une récurrence[8] triviale prouve que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ P_n(0) = 0.}$
De même, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q_{n+2}(0) = (2n+3)Q_{n+1}(0)$.
Et donc $Q_0(0) = Q_1(0) = 1$, $Q_2(0) = 3$, $Q_3(0) = 5Q_2(0) = 5\times 3$, $Q_4(0) = 7Q_3(0) = 7\times5\times3$.
Autrement dit, il semblerait que $Q_n(0)$ soit le produit de tous les impairs de 1 à $2n-1$.
Mais il est classique[9]

[8] Simple.

[9] Nous l'avons fait en TD.

$$1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Prouvons donc par récurrence sur n que pour $n \in \mathbf{N}$ que $Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.
Pour $n=0$, on a $\dfrac{0!}{2^0 0!} = 1 = Q_0(1)$, pour $n=1$, on a $\dfrac{2!}{2^1 1!} = 1$.
Soit $n \geqslant 1$ tel que $Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. Alors

$$Q_{n+1}(0) = (2(n-1)+3)Q_n(0) = (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{2n+2}{2n+2}\frac{(2n+1)!}{2^n n!} = \frac{1}{2(n+1)}\frac{(2n+2)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}.}$

Reste à noter que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q_n(0)$ est le coefficient constant de Q_n. Notons donc p le degré de Q_n, et soient $a_0, \dots, a_p$ les coefficients de Q_n, que nous savons entiers naturels.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$Q_n(x) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} a_k x^k}_{\geqslant 0} \geqslant a_0 = Q_n(0) = \boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}}.$$

4.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. Les fonctions P_n et Q_n sont dérivables sur $\mathbf{R}_+$ car polynomiales, et ils connu que ch et sh sont également dérivables.
Donc par produit, les fonctions $Q_n\,\mathrm{sh}$ et $P_n\,\mathrm{ch}$ sont dérivables, et donc par sommes de fonctions dérivables, $\boxed{f_n \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+.}$

4.b. Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$, en notant $\mathscr{P}(n)$: «$\forall x \geqslant 0,\ f'_{n+1}(x) = -xf_n(x)$».
Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f_1(x) = Q_1(x)\,\mathrm{sh}(x) - P_1(x)\,\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$$

et donc pour tout $x \geqslant 0$, $f_1'(x) = \mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) = -x\,\mathrm{sh}(x)$.
Mais par ailleurs, pour tout $x \geqslant 0$, $f_0(x) = \mathrm{sh}(x) - 0\,\mathrm{ch}(x)$, et donc $f_1'(x) = -xf_0(x)$.
Pour $n = 1$, on a $f_2(x) = (3+x^2)\,\mathrm{sh}(x) - 3x\,\mathrm{ch}(x)$ et donc

⚠ Attention !
Qui dit récurrence double dit initialisation double.

$$f_2'(x) = 2x\,\mathrm{sh}(x) + (3+x^2)\,\mathrm{ch}(x) - 3\,\mathrm{ch}(x) - 3x\,\mathrm{sh}(x) = x^2\,\mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x) = -xf_1(x).$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Alors pour $x \geqslant 0$,

$$f_{n+2}'(x) = (2n+3)f_{n+1}'(x) + 2xf_n(x) + x^2 f_n'(x) = -(2n+3)xf_n(x) + 2xf_n(x) - x^3 f_{n-1}(x)$$

$$= -x\left((2n+1)f_n(x) + x^2 f_{n-1}(x)\right) = -x f_{n+1}(x).$$

Et donc par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ et tout } x \geqslant 0,\ f'_{n+1}(x) = -x f_n(x).}$

4.c. Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(0) = Q_n(0)\operatorname{sh}(0) - P_n(0)\operatorname{ch}(0) = -P_n(0) = 0$.
Prouvons tout d'un coup, en montrant par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}$ la propriété : «f_n est strictement monotone sur $\mathbf{R}_+$, croissante si n est pair et décroissante si n est impair, et pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| > 0$.»
Initialisation : puisque $f_0 = \operatorname{sh}$, f_0 est strictement croissante.
Et alors puisque $f_0(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_0(x) > 0$ et donc $|f_0(x)| > 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que f_n soit strictement monotone sur $\mathbf{R}_+$, croissante si n pair et décroissante sinon, et vérifiant : $\forall x > 0$, $|f_n(x)| > 0$.
Si n est pair, puisque $f_n(0) = 0$ et que f_n est strictement croissante, pour tout $x > 0$, $f_n(x) > 0$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_{n+1}(x) = -x f_n(x) < 0$.
Donc f_{n+1} est strictement décroissante[10]. Puisque $f_{n+1}(0) = 0$, pour tout $x > 0$, $f_{n+1}(x) < 0$, et donc $|f_{n+1}(x)| > 0$.
Si n est impair, alors f_n est strictement décroissante et vérifie $f_n(0) = 0$, si bien que pour tout $x > 0$, $f_n(x) < 0$. Et donc pour tout $x > 0$, $f'_{n+1}(x) = -x f_n(x) > 0$, si bien que f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme elle s'annule en 0, pour tout $x > 0$, $f_{n+1}(x) > 0$, et donc $|f_{n+1}(x)| > 0$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est strictement monotone sur $\mathbf{R}_+$, et pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| > 0$.

[10] Sa dérivée ne s'annule qu'en 0.

5.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\begin{aligned}
g'_{n+1}(x) &= \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\operatorname{sh}(x) + \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\operatorname{ch}(x) \\
&= \frac{\cancel{2}\cancel{(n+1)}x^{2n+1}}{\cancel{2}\cdot 2^n\cancel{(n+1)}n!}\operatorname{sh}(x) + \underbrace{\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\operatorname{ch}(x)}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant 8\frac{x^{2n+1}}{2^n n!}\operatorname{sh}(x) = \boxed{x g_n(x).}
\end{aligned}$$

5.b. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$.
Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f_0(x) = \operatorname{sh}(x) = g_0(x)$. Puisque $|f_0(x)| = f_0()$, la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|f'_{n+1}(x)| = |-x f_n(x)| \leqslant x|f_n(x)| \leqslant x g_n(x) \leqslant g'_{n+1}(x)$.
Puisque par ailleurs $f_{n+1}(0) = -P_{n+1}(0)\operatorname{ch}(0) = 0$ et $g_{n+1}(0) = 0$, la question 1 s'applique pour prouver que pour tout $x \geqslant 0$, $|f_{n+1}(x)| \leqslant g_{n+1}(x)$.
Et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$.

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \geqslant 0$,

$$\left|Q_n(x)\operatorname{sh}(x) - P_n(x)\operatorname{ch}(x)\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{2^n n!}\operatorname{sh}(x).$$

En divisant par $\dfrac{Q_n(x)}{\operatorname{ch}(x)} > 0$, on obtient alors $\left|\operatorname{th}(x) - \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}\dfrac{\operatorname{th}(x)}{Q_n(x)}$.
Par ailleurs, pour $x \geqslant 0$, $\operatorname{th}(x) \leqslant 1$ et $Q_n(x) \geqslant \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$, si bien que $\dfrac{1}{Q_n(x)} \leqslant \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$, et donc

$$\left|\operatorname{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Remarque
Notons que $Q_n(x) > 0$ grâce à la minoration obtenue à la question 3.b.

Enfin, pour $x > 0$, puisque $|f_n(x)| > 0$, on a bien $0 < \left|\operatorname{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|$.

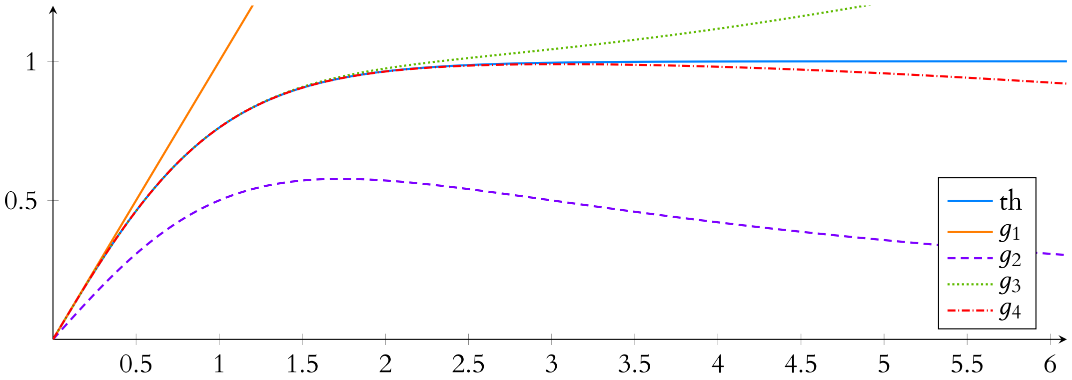
5.c. Il vient donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left|\operatorname{th}(1) - \dfrac{P_n(1)}{Q_n(1)}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n)!}$.
Et donc pour $n = 3$, $\dfrac{1}{(2n)!} = \dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720} < 10^{-2}$.

Ce qui prouve que $\left|\text{th}(1) - \dfrac{P_3(1)}{Q_3(1)}\right| < 10^{-2}$.

Après calculs, on obtient $P_3(1) = 28$ et $Q_3(1) = 37$, si bien que $\left|\text{th}(1 - \dfrac{28}{37})\right| < 10^{-2}$, et donc $\frac{28}{37}$ est un rationnel approchant $\text{th}(1)$ à moins de 10^{-2} près.

Commentaires *: nous venons donc de construire une suite de fonctions rationnelles*[11] *qui réalisent une bonne approximation de la fonction* th.
Un des intérêts est notamment le calcul de valeurs approchées de th*, puisqu'il est bien plus aisé de calculer avec des polynômes qu'avec des exponentielles.*
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premières fonctions $g_n = \frac{P_n}{Q_n}$ *sur l'intervalle* $[0, 6]$, *et on ne peut que constater qu'elles semblent approcher de mieux en mieux la fonction* th.

[11] C'est-à-dire de quotients de fonctions polynomiales.



6.a. Repartons du résultat de la question 5.b, pour $x = 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$0 < \left|Q_n(1)\,\text{sh}(1) - P_n(1)\,\text{ch}(1)\right| \leqslant \dfrac{\text{sh}(1)}{2^n n!}$ et donc $0 < \left|Q_n(1)\,\text{th}(1) - P_n(1)\right| \leqslant \dfrac{\text{th}(1)}{2^n n!} \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}$.

Puisque $\text{th}(1) = \frac{p}{q}$, en multipliant l'inégalité qui précède par q, il vient

$$\boxed{0 < |pQ_n(1) - qP_n(1)| < \frac{q}{2^n n!}.}$$

6.b. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ un entier strictement plus grand que q, de sorte que $2^{n_0} n_0! \geqslant n_0 > q$. On a donc $0 < \dfrac{q}{2^{n_0} n_0!} < 1$.
Mais alors, pour ce même n_0, $0 < \left|pQ_{n_0}(1) - qP_{n_0}(1)\right| < 1$.
Mais par la question 3, $P_{n_0}(1)$ et $Q_{n_0}(1)$ sont des entiers, si bien que $|pQ_{n_0}(1) - qP_{n_0}(1)| \in \mathbf{N}$.
Et donc nous avons un entier strictement compris entre 0 et 1, ce qui est impossible.
On en déduit donc une contradiction, si bien que $\boxed{\text{th}(1) \text{ est irrationnel.}}$

6.c. Notons que $\text{th}(1) = \dfrac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}$.
Si e était rationnel, il en serait de même de son inverse e^{-1}.
Et donc par somme et quotient de rationnels, $\text{th}(1)$ serait encore rationnel, et nous venons de prouver que ce n'est pas le cas. Donc $\boxed{e \text{ est irrationnel.}}$

7. Commençons par adapter le raisonnement précédent pour prouver que pour r rationnel non nul[12], $\text{th}(r)$ n'est pas rationnel.
Par imparité de th, il suffit de le prouver pour r rationnel strictement positif. Soit donc r un tel rationnel, et soient $a, b \in \mathbf{N}^*$ tels que $r = \frac{a}{b}$.
Supposons par l'absurde que $\text{th}(r) = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbf{N}^*$. Alors comme précédemment, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|pQ_n(r) - qP_n(r)| \leqslant \frac{q}{2^n n!}.$$

Une récurrence double prouverait que P_n et Q_n sont de degré au plus n. Et donc si on note $c_0, \dots, c_n$ les coefficients de P_n, alors

$$P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} c_k r^k = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{a^k}{b^k} = \frac{1}{b^n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} c_k a^k b^{n-k}}_{\in \mathbf{N}}.$$

[12] $\text{th}(0) = 0 \in \mathbf{Q}$

Autrement dit, $b^n P_n(r) \in \mathbf{N}$. Et de même, $b^n Q_n(r) \in \mathbf{N}$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|pb^n Q_n(r) - b^n q P_n(r)| \leqslant q\frac{b^n}{2^n n!}$.

Prouvons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b^n}{2^n n!} = 0$.
Commençons par noter qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{b}{2} \leqslant n_0$.
Et alors pour $n > n_0$,

$$0 \leqslant \frac{b^n}{2^n n!} = \frac{b^{n_0}}{2^{n_0} n_0!} \underbrace{\frac{b}{2(n_0+1)}}_{\leqslant 1} \underbrace{\frac{b}{2(n_0+2)}}_{\leqslant 1} \cdots \underbrace{\frac{b}{2(n-1)}}_{\leqslant 1} \frac{b}{2n} \leqslant \frac{b^{n_0}}{2^{n_0} n_0!} \frac{b}{2n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b}{2n} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b^n}{2^n n!} = 0$.
Soit donc N tel que $\dfrac{b^N}{2^N N!} < \frac{1}{q}$. On a alors $0 < \left|pb^N Q_N(r) - qb^N P_N(r)\right| < 1$.
Mais puisque $\left|pb^N Q_N(r) - qb^N P_N(r)\right| \in \mathbf{N}$, c'est absurde.
Et donc $\mathrm{th}(r)$ n'est pas rationnel.
On en déduit que e^r n'est pas rationnel, faute de quoi on aurait $\mathrm{th}(r) = \frac{e^r - \frac{1}{e^r}}{e^r + \frac{1}{e^r}} \in \mathbf{Q}$.

Ainsi, pour tout rationnel r non nul, e^r n'est pas rationnel.

Supposons par l'absurde qu'il existe un rationnel r strictement positif et différent de 1 tel que $\ln(r)$ soit rationnel.
Alors $\ln(r) \neq 0$ si bien que par ce qui précède, $e^{\ln(r)} \notin \mathbf{Q}$. Mais $e^{\ln(r)} = r$, est rationnel.
Donc $\ln(r)$ n'est pas rationnel.
Et puisqu'inversement, il est clair que $\ln(1) = 0 \in \mathbf{Q}$, on a bien prouvé que pour tout rationnel strictement positif, $\ln(r) \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow r = 1$.

Remarque
Il s'agit d'un résultat de croissances comparées qui sera bientôt dans le cours : $n!$ tend plus vite vers $+\infty$ que toute suite géométrique et donc notamment que $\left(\frac{b}{2}\right)^n$.