Devoir surveillé 1 (3h)

► *Les calculatrices sont **interdites**.*
► *La qualité d'une copie ne tient pas uniquement aux calculs et aux résultats qui s'y trouvent.*
Vous apporterez donc un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.
***La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements** sont des éléments susceptibles d'influencer la note finale.*
► *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple 6.c. et pas seulement c.) et **d'encadrer vos résultats**.*
► *Si vous repérez ce qui **vous semble être une erreur d'énoncé**, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.*

► Exercice 1 : échauffement calculatoire — *40 min*

Les questions 1) à 4) sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation $2e^x - 7 = 4e^{-x}$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
2. Résoudre l'équation $\Big|\big||x+1|+2\big|-3\Big| = 2$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
3. Résoudre l'inéquation $4|x+1|x - |x| > 1$.
4. On considère l'équation $(E) \quad : \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = x$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
   a. Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ est une solution de (E), alors x est un entier négatif ou nul.
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

► Exercice 2 : raisonnements divers — *40 min*

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor$ est impair.
2. Montrer que toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en -1 et en 1.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs distincts. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2^n(a^n + b^n) > (a+b)^n$.

► Exercice 3 : irrationalité de $\cos(1°)$ — *20 min*

On pose $\alpha = \frac{\pi}{180}$, qui correspond donc à un angle de $1°$. On souhaite prouver que $\cos(\alpha)$ est irrationnel.
À cet effet, on raisonne par l'absurde en supposant $\cos(\alpha)$ rationnel.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $\cos((n+1)\alpha)$ et $\cos((n-1)\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha), \sin(\alpha), \cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$.
   En déduire une expression de $\cos((n+1)\alpha)$ en fonction de $\cos(n\alpha)$ et $\cos((n-1)\alpha)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(n\alpha)$ est rationnel.
3. Conclure.

► Exercice 4 : suites pseudo-croissantes — *20 min*

On dira qu'une suite (u_n) de réels est croissante si : $\forall m, n \in \mathbf{N},\ m \leqslant n \Rightarrow u_m \leqslant u_n$.
On dit également que (u_n) est pseudo-croissante si : $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N},\ m \geqslant N \Rightarrow u_m \geqslant u_n$.

1. Montrer qu'une suite croissante est pseudo-croissante.
2. Montrer que la suite $((-1)^n)_n$ n'est pas pseudo-croissante.

3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites pseudo-croissantes. On pose alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = u_n + v_n$. Justifier que la suite (w_n) est encore pseudo-croissante.
4. À l'aide de la suite $(n + (-1)^n)$, justifier que la réciproque de la question 1. est fausse.

▸ Problème : une équation fonctionnelle — *1h*

Ce problème a pour but la détermination de toutes les fonctions $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ vérifiant à la fois les deux conditions suivantes :

i) $\forall x, y \in \mathbf{R}_+,\ f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$ ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}_+,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

On rappelle que pour tout réel α et pour tout $x > 0$, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$, et qu'on pose également $0^\alpha = 0$.

Partie I. Un exemple

Dans cette partie, on considère α un réel supérieur ou égal à 1 et on note $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$.

1. Justifier que f satisfait ii).
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.
3. En déduire que : $\forall x, y \in \mathbf{R}_+,\ (x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$, et donc que f est une solution au problème posé.

Partie II. Quelques propriétés des solutions au problème

4. Quelles sont les fonctions constantes sur $\mathbf{R}_+$ satisfaisant les conditions i) et ii) ?

Dans la suite de cette partie, $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est une fonction fixée, **non constante** et satisfaisant les conditions i) et ii).

5. Montrer que $f(0) = 0$ et que $f(1) = 1$.
6. a. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{N},\ f(x^n) = f(x)^n$.
   b. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) \neq 0$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   c. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.
7. Montrer que f est croissante.

Partie III. Détermination de l'ensemble des solutions du problème

Dans cette partie, f désigne toujours une fonction non constante sur $\mathbf{R}_+$ satisfaisant i) et ii).

8. Montrer que $\ln f(2)$ est bien défini et que $\ln f(2) \geqslant \ln(2)$.
9. Justifier que pour tout $x > 0$, il existe un unique entier $q \in \mathbf{Z}$ tel que $2^q \leqslant x < 2^{q+1}$.
10. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Pour $p \in \mathbf{N}^*$, on note q_p l'unique entier relatif tel que $2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1}$.
    a. Déterminer $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{q_p}{p}$.
    b. Justifier que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{q_p}{p} \leqslant \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leqslant \dfrac{q_p + 1}{p}$.
    c. En déduire que $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.
11. On pose $\alpha = \dfrac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$. Justifier que $\alpha \geqslant 1$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) = x^\alpha$.
12. Déterminer alors l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ vérifiant i) et ii).

▸ Question subsidiaire (à n'aborder que si vous estimez avoir très bien réussi tout le reste)

Mon ordinateur m'indique que $\lfloor\sqrt{44}\rfloor = 6$, $\lfloor\sqrt{4444}\rfloor = 66$, $\lfloor\sqrt{444444}\rfloor = 666$.
Est-il vrai que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\lfloor \underbrace{\sqrt{4444\cdots44}}_{2n \text{ chiffres}} \rfloor = \underbrace{66\cdots6}_{n \text{ chiffres}}$?

Correction du Devoir surveillé 1

► Exercice 1 : échauffement calculatoire

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a alors

$$2e^x - 7 = 4e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{2x} - 7e^x = 4 \Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2 - 7e^x - 4 = 0.$$

Posons alors $X = e^x$, si bien que x est solution si et seulement si $2X^2 - 7X - 4 = 0$.
Or cette dernière équation[1] d'inconnue X possède deux solutions, qui sont
$X_1 = \dfrac{7+\sqrt{81}}{4} = 4 > 0$ et $X_2 = \dfrac{7-\sqrt{81}}{4} < 0$.
Et donc x est solution de l'équation de départ si et seulement si $e^x = X_1$ **ou** $e^x = X_2$.
Or $e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(4)$ et $e^x = X_2$ n'a pas de solution.
Donc $\boxed{\text{l'équation possède une unique solution qui est } \ln(4).}$

[1] De discriminant égal à 81.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $|x+1| \geqslant 0$, et donc $|x+1|+2 \geqslant 0$, de sorte que $\big||x+1|+2\big| = |x+1|+2$.
Et donc $\Big|\big||x+1|+2\big|-3\Big| = \big||x+1|-1\big|$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Big|\big||x+1|+2\big|-3\Big| = 2 &\Leftrightarrow \big||x+1|-1\big| = 2\\ &\Leftrightarrow |x+1|-1 = 2 \textbf{ ou } |x+1|-1 = -2\\ &\Leftrightarrow |x+1| = 3 \textbf{ ou } |x+1| = -1.\end{aligned}$$

Il est évident que $|x+1| = -1$ n'a pas de solution, et

$$|x+1| = 3 \Leftrightarrow (x+1 = 3 \textbf{ ou } x+1 = -3) \Leftrightarrow (x = 2 \textbf{ ou } x = -4).$$

Donc $\boxed{\text{l'équation possède deux solutions qui sont 2 et } -4.}$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Distinguons 3 cas :

► <u>Si $x \geqslant 0$</u> : alors $|x+1| = x+1$ et $|x| = x$.
Et donc $4|x+1|x - |x| > 1 \Leftrightarrow 4(x+1)x - x > 1 \Leftrightarrow 4x^2+3x-1 > 0$.
Ce polynôme possède deux racines qui sont $\frac{1}{4}$ et -1, si bien que pour $x \geqslant 0$,

$$4(x+1)x - x > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup \left]\frac{1}{4},+\infty\right[\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

Remarque
Notons que la dernière équivalence ne vaut que parce qu'on a supposé $x \geqslant 0$.

► <u>Si $-1 \leqslant x < 0$</u>. Alors $|x+1| = x+1$ et $|x| = -x$.
Et donc $4|x+1|x - |x| > 1 \Leftrightarrow 4(x+1)x + x > 1 \Leftrightarrow 4x^2+5x-1 > 0$.
Ce polynôme possède alors deux racines $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{41}}{8} < -1$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{41}}{8} > 0$.

De tête ?
Puisque $5^2 < 41$, $\sqrt{41} > 5$, ce qui suffit pour constater $x_1 < -1$ et $x_2 > 0$.

Et donc pour tout $x \in [-1,0[$, $4x^2+5x-1 < 0$.

► <u>Si $x < -1$</u>. Alors $|x+1| = -x-1$, et $|x| = -x$. Et donc

$$4|x+1|x - |x| > 1 \Leftrightarrow -4x(x+1) + x > 1 \Leftrightarrow 4x^2+3x+1 < 0.$$

Or un calcul de discriminant nous informe que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $4t^2+3t+1 > 0$.

Donc au final, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est } \left]\frac{1}{4},+\infty\right[.}$

4.a. Soit x un réel vérifiant (E). Alors $x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ est un entier puisque somme de deux entiers.
Supposons par l'absurde $x > 0$. On a alors $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \leqslant \frac{5}{6}x < x$.
Ceci vient contredire le fait que $x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$.
Et donc $\boxed{x \text{ est un entier négatif.}}$

Remarque
Si $x < 0$, la dernière inégalité est fausse puisqu'en multipliant les deux membres de l'inégalité $\frac{5}{6} < 1$ par x, on change le sens de l'inégalité.

4.b. Soit $x \in \mathbf{Z}$ un entier, que l'on suppose de plus négatif. Alors $\frac{x}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ et $\frac{x}{3} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$.
Et donc en particulier, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor > \frac{x}{2} - 1 + \frac{x}{3} - 1 \geqslant \frac{5x}{6} - 2$.
Donc pour x solution de (E), $x > \frac{5x}{6} - 2$ et donc $x > -12$.
Reste donc à tester tous les entiers entre -11 et 0 afin de voir s'ils sont ou non solution de (E).
On a $\left\lfloor \frac{-11}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-11}{3} \right\rfloor = -6 - 4 \neq -11$, donc -11 n'est pas solution.
De même, $\left\lfloor \frac{-10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-10}{3} \right\rfloor = -5 - 4 \neq -10$.
Puis $\left\lfloor \frac{-9}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-9}{3} \right\rfloor = -5 - 3 \neq -9$, etc.
Après calcul, on trouve que les seules solutions de (E) sont $\boxed{-7, -5, -4, -3, -2 \text{ et } 0.}$

Rappel — Si on a l'habitude d'utiliser

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

(qui est donc un encadrement de x à l'aide de $\lfloor x \rfloor$), on se souviendra qu'on en tire facilement l'encadrement de $\lfloor x \rfloor$ suivant :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

▸ Exercice 2 : raisonnements divers

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $n^2 \leqslant n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 \leqslant (n+1)^2$.
Donc par stricte[2]croissance de la fonction racine, $n \leqslant \sqrt{n^2+n+1} < n+1$, et donc $2n \leqslant 2\sqrt{n^2+n+1} < 2n+2$.
On en déduit déjà que $2n \leqslant \left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor \leqslant 2n+1$.
Puisque l'énoncé semble nous dire que $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor$ est impair, et puisque le seul entier impair dans $[\![2n, 2n+1]\!]$ est $2n+1$, prouvons que $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor = 2n+1$.

Il nous faut donc prouver que $2n+1 \leqslant 2\sqrt{n^2+n+1} < 2n+2$, sachant que l'inégalité de droite a déjà été prouvée.
Or, on a $2n+1 \leqslant 2\sqrt{n^2+n+1} \Leftrightarrow (2n+1)^2 \leqslant 4(n^2+n+1) \Leftrightarrow 4n^2+4n+1 \leqslant 4n^2+4n+4$.
Cette dernière inégalité étant clairement vraie, on a donc $2n+1 \leqslant 2\sqrt{n^2+n+1}$, et donc $\left\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor = 2n+1$, $\boxed{\text{qui est bien impair.}}$

[2] La **stricte** croissance est nécessaire pour préserver les inégalités strictes.

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
Procédons par analyse-synthèse.

Rédaction — Puisqu'il s'agit de prouver quelque chose «pour toute fonction», on commence par **fixer** une telle fonction à l'aide de «Soit f».

▸ **Analyse** : supposons que f soit la somme d'une fonction affine g et d'une fonction h telle que $h(1) = h(-1) = 0$.
Notons g et h deux telles fonctions, et soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que pour tout réel x, $g(x) = ax+b$.
Alors $f(1) = g(1) + h(1) = g(1) = a + b$, et $f(-1) = h(-1) = -a + b$.
On en déduit facilement que $a = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$, et donc $b = f(1) - a = \dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2}x + \dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.
Et par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(1)-f(-1)}{2}x - \frac{f(1)+f(-1)}{2}.$$

Donc si de telles fonctions g et h existent, alors elles sont uniques.

Remarque — L'existence de tels réels a et b découle de la définition d'une fonction affine.

Pas de surprise — Vous avez peut-être reconnu l'équation de la droite passant par les points $(-1, f(-1))$ et $(1, f(1))$.

Unicité ? — Nous venons de déterminer entièrement g et h, et donc il n'y a pas d'autre choix possibles pour ces fonctions. D'où l'unicité **sous réserve d'existence.**

▸ **Synthèse** : posons $g : x \mapsto \dfrac{f(1)-f(-1)}{2}x + \dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$ et $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.
Alors il est évidemment que g est affine, et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.
Enfin, $h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} - \dfrac{f(1)+f(-1)}{2} = 0$ et de même

$$h(-1) = f(-1) - g(-1) = f(-1) + \frac{f(1)-f(-1)}{2} - \frac{f(1)+f(-1)}{2} = 0.$$

Et donc il existe bien au moins une manière d'écrire f comme somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en -1 et en -1.

Ainsi, nous avons prouvé que toute fonction s'écrit de manière **unique** comme somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en -1 et en 1.

3. Soient a, b deux réels strictement positifs distincts.
Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $2^n(a^n + b^n) > (a+b)^n$.

Pour $n = 0$, on a bien $2^0(a^0 + b^0) = 1(1+1) = 2 > (a+b)^0 = 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $2^n(a^n + b^n) > (a+b)^n$.
Alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) < 2^n(a^n+b^n)(a+b)$.
On a alors $2^n(a^n+b^n)(a+b) = 2^n\left(a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b + ab^n\right)$.
Prouvons donc que $2^n\left(a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b + ab^n\right) \leqslant 2^{n+1}\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)$. Mais

Détails
L'inégalité est toujours stricte car $a + b \neq 0$, puisqu'on ne peut avoir $a = b = 0$.

$$\begin{aligned}
2^n\left(a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b + ab^n\right) \leqslant 2^{n+1}\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right) &\Leftrightarrow 2^{n+1}\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right) - 2^n\left(a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b + ab^n\right) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow 2^n a^{n+1} + 2^n b^{n+1} - 2^n a^n b - 2^n ab^n \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow a^{n+1} + b^{n+1} - a^n b - ab^n \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow (a^n - b^n)(a-b) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Détails
$2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$.

Or, par ·croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$, $a^n - b^n$ et $a - b$ sont toujours de même signe, si bien que $(a^n - b^n)(a-b) \geqslant 0$.
Et donc $(a+b)^{n+1} < 2^{n+1}\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ (a+b)^n < 2^n(a^n + b^n).}$

► Exercice 3 : irrationalité de $\cos(1°)$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Utilisons la formule d'addition bien connue :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ et } \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Alors
$$\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha + \alpha) = \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha)$$
et
$$\cos(((n-1)\alpha)) = \cos(n\alpha - \alpha) = \cos(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(n\alpha)\sin(\alpha).$$
En sommant des deux égalités, il vient
$$\cos((n+1)\alpha) + \cos((n-1)\alpha) = 2\cos(n\alpha)\cos(\alpha).$$
Et donc $\boxed{\cos((n+1)\alpha) = 2\cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \cos((n-1)\alpha).}$

2. Procédons par récurrence **double** sur $n \in \mathbf{N}$ en prouvant $\mathscr{P}(n) : \cos(n\alpha) \in \mathbf{Q}$.
Pour $n = 0$, on a $\cos(0\alpha) = \cos(0) = 1 \in \mathbf{Q}$.
Pour $n = 1$, c'est l'hypothèse de notre raisonnement par l'absurde : $\cos(\alpha) \in \mathbf{Q}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\cos(n\alpha) \in \mathbf{Q}$ et $\cos((n+1)\alpha) \in \mathbf{Q}$. Alors

Méthode
Qui dit récurrence **double** dit initialisation **double**.

$$\cos((n+2)\alpha) = 2\underbrace{\cos((n+1)\alpha)}_{\in\mathbf{Q}}\underbrace{\cos(\alpha)}_{\in\mathbf{Q}} - \underbrace{\cos(n\alpha)}_{\in\mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}.$$

Détails
On a utilisé ici le fait que la somme et le produit de deux rationnels sont encore des rationnels.

Et donc par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ \cos(n\alpha) \in \mathbf{Q}.}$

3. D'après ce qui précède, $\cos(45\alpha) \in \mathbf{Q}$. Or $\cos(45\alpha) = \cos\left(\dfrac{45}{180}\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Mais il est bien connu que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, et donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ne peut pas être rationnel (faute de quoi on aurait $\sqrt{2} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{Q}$).
Nous tenons bien notre contradiction, si bien que notre hypothèse de départ est absurde :
$\boxed{\cos(\alpha) \text{ est donc bien irrationnel.}}$

► Exercice 4 : suites pseudo-croissantes.

1. Soit (u_n) une suite croissante. Soit alors $n \in \mathbf{N}$, et notons $N = n$.
Alors par croissance de (u_n), pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant N \Rightarrow u_m \geqslant u_n$.
Donc nous avons bien prouvé que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists N \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N},\ m \geqslant N \Rightarrow u_m \geqslant u_n.$$
Et donc $\boxed{(u_n) \text{ est pseudo-croissante.}}$

2. Supposons par l'absurde que $((-1)^n)_n$ soit pseudo-croissante.
Prenons alors $n = 2$ et notons N un entier tel que[3] $\forall m \in \mathbf{N},\ m \geqslant N \Rightarrow u_m \geqslant u_n$.
Alors en particulier, pour $m = 2N+1$, qui est bien supérieur ou égal à N, il vient $u_m = (-1)^{2N+1} = -1 \geqslant u_n = 1$, ce qui est absurde.
Et donc $\boxed{\text{la suite } ((-1)^n)_n \text{ n'est pas pseudo-croissante.}}$

[3] L'existence d'un tel entier est garantie la définition de la pseudo-croissance.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons alors N_1 et N_2 deux entiers tels que $\forall m \in \mathbf{N},\ m \geqslant N_1 \Rightarrow u_m \geqslant u_n$ et $\forall m \in \mathbf{N},\ m \geqslant N_2 \Rightarrow v_m \geqslant v_n$.
Notons alors N un entier supérieur à la fois à N_1 et N_2 (notons que cela peut-être $\max(N_1, N_2)$ ou encore $N_1 + N_2$).
Soit alors $m \in \mathbf{N}$ tel que $m \geqslant N$. Puisque $N \geqslant N_1$, on a donc $u_m \geqslant u_n$, et de même, puisque $m \geqslant N_2$, $v_m \geqslant v_n$.
Et donc $u_m + v_m \geqslant u_n + v_n$, soit encore $w_m \geqslant w_n$.
Ainsi, nous venons de prouver que : $\exists N \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N},\ m \geqslant N \Rightarrow w_m \geqslant w_n$.
Et ceci étant vrai quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est pseudo-croissante.}}$

4. Prouvons que $(n + (-1)^n)_n$ est pseudo-croissante.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons donc $u_n = n + (-1)^n$. Soit donc $n \in \mathbf{N}$. On a alors $n-1 \leqslant u_n \leqslant n+1$.
Notons alors $N = n+2$, et soit m un entier supérieur ou égal à N.
Alors $u_m \geqslant m - 1 \geqslant N - 1 \geqslant n + 2 - 1 \geqslant n + 1 \geqslant u_n$.
Et donc nous avons bien prouvé que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N},\ m \geqslant N \Rightarrow u_m \geqslant u_n.$$

Et donc (u_n) est pseudo-croissante.

En revanche, elle n'est pas croissante, puisque $1 \geqslant 0$, alors que $u_1 = 0$ et $u_0 = 1 > u_1$.
Donc $\boxed{\text{la réciproque à la question 1. est fausse}}$: une suite peut être pseudo-croissante sans être croissante.

▸ Problème : une équation fonctionnelle.

Partie I.

1. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+$. Si l'un de ces deux réels est nul, alors son image par f est nulle, si bien que $f(xy) = f(0) = 0 = f(x)f(y)$.
Et si x et y sont tous deux non nuls, alors $xy \neq 0$ et donc

$$f(xy) = e^{\alpha \ln(xy)} = e^{\alpha \ln(x) + \alpha \ln(y)} = e^{\alpha \ln(x)} e^{\alpha \ln(y)} = x^\alpha y^\alpha = f(x)f(y).$$

Donc $\boxed{\forall x, y \in \mathbf{R}_+,\ f(xy) = f(x)f(y).}$

2. Pour $x \geqslant 0$, posons $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x) = e^{\alpha \ln(1+x)} - (1+\alpha x)$.
Alors f_α est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ par somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f_\alpha'(x) = \frac{\alpha}{1+x} e^{\alpha \ln(1+x)} - \alpha = \alpha \left(e^{\alpha \ln(1+x)} e^{-\ln(1+x)} - 1 \right) = \alpha \left(e^{(\alpha - 1)\ln(1+x)} - 1 \right).$$

Alors pour tout $x \geqslant 0$, $(\alpha - 1)\ln(1+x) \geqslant 0$, donc $e^{(\alpha-1)\ln(1+x)} \geqslant 1$, si bien que $f_\alpha'(x) \geqslant 0$.
On en déduit que f_α est croissante sur $\mathbf{R}_+$.
Puisque de plus $f_\alpha(0) = 1 - 1 = 0$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f_\alpha(x) \geqslant 0$, et donc $\boxed{(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x.}$

3. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+$. Si $x = 0$, alors $(x+y)^\alpha = y^\alpha \geqslant \overbrace{x^\alpha}^{=0} + y^\alpha$.
Si $x \neq 0$, alors $\left(1 + \frac{y}{x}\right)^\alpha \geqslant 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha$.
En multipliant les deux membres de cette inégalité par x^α (qui est positif), il vient

$$x^\alpha \left(1 + \frac{y}{x}\right)^\alpha \geqslant x^\alpha + x^\alpha \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha.$$

Et d'après la question 1., $x^\alpha \left(1 + \frac{y}{x}\right)^\alpha = \left(x\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)^\alpha = (x+y)^\alpha$, donc $\boxed{(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha.}$

Partie II.

4. Soit f une fonction constante, et notons $\beta = f(0)$ l'unique valeur prise par cette fonction. Alors si f satisfait ii), on a $f(0) = f(0 \times 0) = f(0) \times f(0)$, donc $\beta = \beta^2$, si bien que $\beta = 0$ ou $\beta = 1$.

> **Astuce**
> Les seuls réels égaux à leur propre carré sont 0 et 1. En effet,
> $$x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0.$$

Inversement, si f est constante égale à 0, alors elle vérifie trivialement les deux points i) et ii).
Et si f est constante égale à 1, alors $f(2) = f(1+1) < f(1) + f(1)$, si bien que f ne vérifie pas i).
Donc $\boxed{\text{la fonction nulle est la seule fonction constante vérifiant i) et ii).}}$

5. Comme précédemment, on a $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Et de plus, d'après i), $f(0) \geqslant f(0) + f(0)$, si bien que $f(0) \leqslant 0$. Donc $\boxed{f(0) = 0.}$

Par le point ii), $f(1) = f(1 \times 1) = f(1)f(1)$, donc $f(1) = f(1)^2$, si bien que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.
Si $f(1) = 0$, on aurait alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) = f(x \times 1) = f(1)f(x) = 0$, et donc f serait constante, ce qui est contraire à notre hypothèse.
Donc $\boxed{f(1) = 1.}$

6.a. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $f(x^n) = f(x)^n$.
Pour $n = 0$, on a bien $f(x^0) = f(1) = 1 = f(x)^0$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $f(x^n) = f(x)^n$.
Alors $f\left(x^{n+1}\right) = f\left(x^n x\right) = f(x^n)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$.
Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ f(x^n) = f(x)^n.}$

6.b. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ non nul. Alors $1 = f(1) = f\left(x\dfrac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Le produit $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$ étant non nul, $\boxed{f(x) \text{ est non nul}}$, et donc[4] $\boxed{\dfrac{1}{f(x)} = f\left(\dfrac{1}{x}\right).}$

[4] En divisant par $f(x) \neq 0$.

6.c. Soit $x > 0$. Alors $f(x) = f\left(\sqrt{x}^2\right) = f\left(\sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$.
Mais par la question précédente, $f\left(\sqrt{x}\right) \neq 0$ car $\sqrt{x} \neq 0$, et donc $\boxed{f(x) > 0.}$

> **Remarque**
> La question 6.c. ne dit rien dans le cas où $y - x = 0$, mais nous avons déjà prouvé que $f(0) = 0$.

7. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+$ tels que $x \leqslant y$. Alors $f(y) = f(x + (y-x)) \geqslant f(x) + f(y-x)$.
Mais par la question 6.c, $f(y-x) \geqslant 0$, si bien que $f(y) \geqslant f(x)$, et donc $\boxed{f \text{ est croissante.}}$

Partie III.

8. Puisque $2 > 0$, par la question 6.c, $f(2) > 0$, et donc $\ln(f(2))$ est bien défini.
Par le point i), on a $f(2) = f(1+1) \geqslant f(1) + f(1) \geqslant 2$.
Et donc par croissance du ln, $\boxed{\ln\left(f(2)\right) \geqslant \ln(2).}$

9. Soit $q \in \mathbf{Z}$. Alors on a[5]

$$2^q \leqslant x < 2^{q+1} \Leftrightarrow q\ln(2) \leqslant \ln(x) < (q+1)\ln(2) \Leftrightarrow q \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < q+1.$$

[5] Par stricte croissance du logarithme.

Or nous savons qu'il existe un unique entier q satisfaisant cette condition, et que c'est $q = \left\lfloor \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

> **Rappel**
> Si on a l'habitude d'utiliser
> $$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$
> (qui est donc un encadrement de x à l'aide de $\lfloor x \rfloor$), on se souviendra qu'on en tire facilement l'encadrement de $\lfloor x \rfloor$ suivant :
> $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

10.a. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Par la question précédente, on a donc $q_p = \left\lfloor \dfrac{p\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$.
Et donc notamment

$$\frac{p\ln(x)}{\ln(2)} - 1 < q_p \leqslant \frac{p\ln(x)}{\ln(2)}.$$

Si bien que

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} < \frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} = 0$ par le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{q_p}{p} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.}$

10.b. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Puisque $2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1}$, par croissance de f, on a
$$f\left(2^{q_p}\right) \leqslant f\left(x^p\right) \leqslant f\left(2^{q_p+1}\right).$$
Si $q_p \geqslant 0$, alors la formule prouvée à la question 6.a. nous donne
$$f(2)^{q_p} \leqslant f(x)^p \leqslant f(2)^{q_p+1}.$$
Mais cette même formule de 6.a. reste valable pour n entier négatif, car si $x \in \mathbf{R}_+$ et n entier négatif, alors
$$f\left(x^n\right) = f\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{f(x)}\right)^{-n} = f(x)^n.$$
Et donc dans tous les cas, $f(2)^{q_p} \leqslant f(x)^p \leqslant f(2)^{q_p+1}$.

Remarque : $-n$ est un entier naturel, donc 6.a. s'applique.

En appliquant la fonction logarithme[6] à chacun des membres, il vient donc
$$q_p \ln(f(2)) \leqslant p \ln(f(x)) \leqslant (q_p+1)\ln(f(2)).$$
Et donc $\boxed{\dfrac{q_p}{p} \leqslant \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leqslant \dfrac{q_p+1}{p}.}$

[6] Toujours croissante.

10.c. Puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{q_p}{p} = 0$, il vient $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{q_p+1}{p} = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{q_p}{p} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
Donc par passage à la limite[7] dans l'encadrement précédent, il vient
$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$
et donc $\boxed{\dfrac{\ln(f(x))}{\ln f(2))} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}.}$

[7] Ce qui est justifié puisque tous les termes de l'inégalité possèdent une limite.

11. Nous avons déjà dit que $\ln(f(2)) \geqslant \ln(2)$, et donc $\boxed{\alpha \geqslant 1.}$
Soit alors $x \in \mathbf{R}_+^*$. Par la question précédente, $\dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$, et donc $\ln(f(x)) = \alpha \ln(x)$.
Et donc $f(x) = e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha$.
Reste à traiter le cas de $x = 0$, où on a alors $f(0) = 0 = 0^\alpha$.
Et donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) = x^\alpha.}$

12. Nous venons de prouver que toute fonction non constante vérifiant i) et ii) est de la forme $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \geqslant 1$, et nous avions prouvé précédemment que la seule fonction constante vérifiant i) et ii) est la fonction nulle.
Inversement, la partie I prouve que les $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$ sont solutions au problème.
Et donc $\boxed{\text{les fonctions vérifiant i) et ii) sont la fonction nulle et les } x \mapsto x^\alpha \text{ pour } \alpha \geqslant 1.}$

▸ Question subsidiaire

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Notons alors $A_n = 4444\cdots 44$ le nombre à $2n$ chiffres tous égaux à 4.
Autrement dit,
$$A_n = 4+4\times10+4\times10^2+\cdots+4\times10^{2n-1} = 4\times(1+10+10^2+\cdots+10^{2n-1}) = 4\times\frac{1-10^{2n}}{1-10} = \frac{4}{9}\left(10^{2n}-1\right).$$
De même, si B_n est le nombre à n chiffres tous égaux à 6, alors
$$B_n = 6+6\times10+\cdots+6\times10^{n-1} = 6\frac{1-10^n}{1-10} = \frac{2}{3}\left(10^n-1\right).$$
On souhaite alors prouver que $\lfloor\sqrt{A_n}\rfloor = B_n$. Procédons par équivalences : on a
$$\lfloor\sqrt{A_n}\rfloor = B_n \Leftrightarrow B_n \leqslant \sqrt{A_n} < B_n+1 \Leftrightarrow B_n^2 \leqslant A_n < (B_n+1)^2.$$
Mais $B_n^2 = \frac{4}{9}\left(10^n-1\right)^2 \leqslant \frac{4}{9}\left(10^n-1\right)\left(10^n+1\right) \leqslant \frac{4}{9}\left(10^{2n}-1\right) = A_n$.
Et par ailleurs, $B_n+1 \geqslant \frac{2}{3}10^n$, si bien que $(B_n+1)^2 \geqslant \frac{4}{9}10^{2n} > \frac{4}{9}\left(10^{2n}-1\right) = A_n$.
Et donc nous avons bien $B_n^2 \leqslant A_n < (B_n+1)^2$, de sorte que $\left\lfloor\sqrt{A_n}\right\rfloor = B_n$.
Et donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ \left\lfloor\sqrt{4444\cdots44}\right\rfloor = 66\cdots6.}$