DEVOIR SURVEILLÉ 8

▸ Exercice 1 : analyse asymptotique

Les questions 1,2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent de $u_n = e^{\tan\frac{\pi}{n}} - \sin\frac{\pi}{n} - \sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}$.
2. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \end{array} \right.$. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f possède une asymptote Δ au voisinage de $+\infty$. Donner une équation de Δ et la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
3. **Étude d'une fonction.**
   Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbf{R}^*, f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)}$.
   a. Justifier que f est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbf{R}$.
   b. Justifier que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$.
   c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f en 0.
   d. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et préciser la valeur de $\tilde{f}'(0)$.
   e. En admettant que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(x) > x$, justifier que
   $$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ 0 \leqslant t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2(t).$$
   En déduire que $\tilde{f}$ est lipschitzienne.

▸ Exercice 2 : commutant d'une matrice 2×2.

Tous les espaces vectoriels considérés dans cet exercice sont des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels.
Pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, on note $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}) \mid AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
On note également $\mathbf{C}[A] = \operatorname{Vect}(A^k, k \in \mathbf{N})$.
On rappelle que $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Montrer $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, et que $1 \leqslant \dim\mathscr{C}(A) \leqslant 4$.
2. a. Donner une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, non nulle, et qui commute avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$.
   b. Montrer que $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}) \mid \forall N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}), MN = NM\} = \operatorname{Vect}(B)$.
   c. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim\mathscr{C}(A) = 4$.
3. a. Montrer que $\mathbf{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(A)$.
   b. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ une matrice n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}(I_2)$. Montrer que $\mathbf{C}[A]$ est de dimension 2 et en donner une base.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. On souhaite prouver que $\dim\mathscr{C}(A) \neq 3$.
   ·Raisonnons par l'absurde en supposant que $\dim\mathscr{C}(A) = 3$.
   a. Montrer que $\mathscr{C}(A) \cap \operatorname{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}) \neq \{0_2\}$ et que $\mathscr{C}(A) \cap \operatorname{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) \neq \{0_2\}$.
   b. En déduire que A est diagonale, puis aboutir à une contradiction.
5. Pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$. *On pourra distinguer plusieurs cas.*
6. Soient $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Montrer que $AB = BA$ si et seulement si ($A \in \mathbf{C}[B]$ **ou** $B \in \mathbf{C}[A]$).

▸ Problème : nombres de Bernoulli et formule de Faulhaber

Dans tout le problème, pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$, on note $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$.

Nous avons déjà rencontré les formules

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},\ S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } S_3(n) = S_1(n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Le but de ce problème est de prouver la formule de Faulhaber, qui donne une expression générale de $S_p(n)$ à l'aide d'une suite de rationnels introduite dans la partie III, la suite des nombres de Bernoulli.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III nécessite les résultats de la partie II.
On n'hésitera pas à admettre le résultat d'une question pour le réutiliser dans une question ultérieure.

Partie I. Dérivation discrète des polynômes

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré au plus n.
Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on note $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$, où $P(X+1)$ désigne la composée $P \circ (X+1)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par Δ.
   On note alors Δ_n l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par Δ.
3. Pour $k \in \mathbf{N}$, calculer $\Delta(X^k)$ et préciser son degré. En déduire le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
   On pourra distinguer le cas où P est constant de celui où $\deg P \geqslant 1$.
4. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta_n$. L'endomorphisme Δ_n est-il injectif ? Surjectif ?
5. En déduire le rang de Δ_n, puis prouver que $\operatorname{Im} \Delta_n = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
6. Prouver que pour tout entier n, Δ_n est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence. L'endomorphisme Δ est-il également nilpotent ?
7. On note $H = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(0) = 0\}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $H_n = H \cap \mathbf{R}_n[X]$.
   a. Déterminer sans calcul la dimension de H_n, pour $n \in \mathbf{N}$.
   b. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Delta_{|H_n}$ réalise une bijection de H_n sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
   c. En déduire que $\Delta_{|H}$ est un isomorphisme de H sur $\mathbf{R}[X]$.
      On note alors $\nabla : \mathbf{R}[X] \to H$ la bijection réciproque de $\Delta_{|H}$.
8. **Existence et unicité des polynômes de Faulhaber.** Soit $p \in \mathbf{N}^*$ fixé.
   a. Montrer qu'il existe au plus un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(n) = S_p(n)$.
   b. On note $F_p = \nabla\big((X+1)^p\big)$. Montrer que $\deg(F_p) = p+1$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_p(n) = S_p(n)$.
   c. Sans le moindre calcul, donner les polynômes F_1, F_2 et F_3.

Partie II. Nombres de Bernoulli

Dans la suite, on note

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

de sorte que $f = \frac{1}{g}$.

9. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, g possède un développement limité d'ordre n en 0, et donner ce développement limité.
10. Déterminer le développement limité d'ordre 4 de f en 0.

11. a. Montrer que g est continue sur $\mathbf{R}$, et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$.

b. Soit φ la fonction inverse, définie sur $\mathbf{R}^*$ par $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, $\varphi^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

c. En utilisant la question précédente, prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $x \neq 0$,

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} e^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k - e^{-x} \right).$$

d. Prouver que g et f sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on appelle $n^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli, et on note $B_n = f^{(n)}(0)$.

12. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer le $DL_n(0)$ de f à l'aide des nombres de Bernoulli.
En utilisant la question 10 en déduire les valeurs de B_k, pour $k \in [\![0, 3]\!]$, et vérifier que $B_4 = -\frac{1}{30}$.

13. Montrer que $\theta : x \mapsto f(x) + \dfrac{x}{2}$ est une fonction paire.
En déduire que pour tout $k \geqslant 1$, $B_{2k+1} = 0$.

14. a. En notant que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)\,(e^x - 1) = x$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

On pourra par exemple utiliser la formule de Leibniz.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, B_n est un nombre rationnel.

Partie III. La formule de Faulhaber

Soit $n \geqslant 2$. On note h_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$.

15. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que h_n possède un $DL_p(0)$, donné par

$$h_n(x) \underset{x \to 0}{=} n + S_1(n-1)x + \frac{S_2(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{S_p(n-1)}{p!}x^p + o\left(x^p\right) \underset{x \to 0}{=} n + \sum_{j=1}^{p} \frac{S_j(n-1)}{j!} x^j + o\left(x^p\right)$$

16. Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $h_n(x) = ng(nx)f(x)$.

17. En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{S_p(n-1)}{p!} = \sum_{k=0}^{p} B_k \frac{n^{p+1-k}}{k!(p+1-k)!}.$$

18. Prouver finalement que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}$$

puis à l'aide de la question 13, démontrer la formule de Faulhaber,

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}.$$

En d'autres termes, nous venons de prouver que le polynôme F_p mentionné à la question 8 est

$$F_p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p+1}{k} B_k X^{p+1-k}.$$

Partie IV. Pour aller plus loin.

Cette partie n'est à aborder que si vous avez très bien réussi tout le reste du sujet ou que vous voulez approfondir le sujet chez vous.

19. Soient $p, k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$.

a. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n}\left[j^k S_p(j) + j^p S_k(j)\right] = S_k(n)S_p(n) + S_{k+p}(n).$$

b. Prouver que

$$S_k(n)S_p(n) = \frac{1}{k+1}\left(S_{p+k+1}(n) + \sum_{i=2}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}B_i S_{k+p+1-i}(n)\right) + \frac{1}{p+1}\left(S_{p+k+1}(n) + \sum_{i=2}^{p}(-1)^i\binom{p+1}{i}B_i S_{k+p+1-i}(n)\right).$$

c. En déduire que si p est impair, alors il existe un polynôme $G_p \in \mathbf{R}[X]$ tel que $F_p = G_p(X(X+1))$.

20. Signe des B_{2p}

a. En notant que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $\dfrac{x}{e^x+1} = \dfrac{x}{e^x-1} - \dfrac{2x}{e^{2x}-1}$, montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{x}{e^x+1} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p}(1-2^k)\frac{B_k}{k!}x^k + o\left(x^p\right).$$

b. En multipliant les deux membres de l'égalité de la question précédente par $\dfrac{x}{e^x-1}$, prouver que pour tout $p \geqslant 2$,

$$\frac{4^p-1}{(2p)!}B_{2p} = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1-4^k}{(2k)!(2p-2k)!}B_{2k}B_{2p-2k}.$$

c. En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, $(-1)^{p-1}B_{2p} > 0$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 8

► Exercice 1 : analyse asymptotique

1. Il s'agit de procéder à un développement limité.
Puisque $\tan \frac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$, on a

$$e^{\tan \frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \tan \frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\tan^2 \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De même,

$$\sin \frac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Enfin,

$$\sqrt{\cos \frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\pi^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Et donc

$$e^{\tan \frac{\pi}{n}} - \sin \frac{\pi}{n} - \sqrt{\cos \frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{3\pi^2}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{3\pi^2}{4n^2}}.$$

> **Méthode**
> Pour obtenir un équivalent, il faut faire un développement limité à un ordre suffisamment grand pour que le développement limité soit non nul.

> **Détails**
> $$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u).$$

2. Rappelons qu'idéalement, nous aimerions obtenir une expression de la forme

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

où si $c \neq 0$ nous pourrons déterminer le signe de $f(x) - (ax+b)$.
Donc il nous faudrait un développement asymptotique en $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.
Et puisque les développements de $\sin\frac{1}{x}$ et $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ commencent par un $\frac{1}{x}$, il suffit d'un développement en $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ de chacun des deux.
On a donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(\frac{2}{x} - \frac{4}{2x^2} + \frac{8}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{7}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

Et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x - 2 + \frac{7}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc $f(x) - (2x-2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{3x}$ si bien qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) - (2x-2)$ est de même signe que $\frac{7}{3x}$, donc positif.
Ainsi, la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$, et au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ.

> **Et si $c = 0$?**
> Si $c = 0$, il faudra sûrement pousser le développement asymptotique un peu plus loin jusqu'à trouver un terme non nul qui nous donnera le signe de $f(x) - (ax+b)$.

3. Étude d'une fonction

3.a. Il est clair que f est continue sur $\mathbf{R}^*$ par produit de fonctions qui le sont.
Et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, si bien que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc f est prolongeable par continuité en une fonction $\widetilde{f}$: $\begin{array}{|ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}\end{array}$
Cette fonction est continue en 0 par définition, et elle l'est sur $\mathbf{R}^*$ car f l'est, donc est continue sur $\mathbf{R}$.

3.b. Les fonctions $x \mapsto x$ et sh étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$, par quotient, f l'est aussi.

3.c. Rappelons que le développement limité d'ordre 6 de $\operatorname{sh}(x)$ est

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6).$$

Et donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2 + o(x^5) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \left(-\frac{1}{120} + \frac{1}{36}\right)x^4 + o(x^5) \\ &\boxed{\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5).} \end{aligned}$$

3.d. Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}$.
Mais $\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} x - o(x^2) - x + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$ et $\operatorname{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, si bien que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. On a donc f qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, avec f' possédant une limite finie en 0.
Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et on a $\widetilde{f}'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

3.e. Étudions la fonction φ définie sur $\mathbf{R}_+$ par $\varphi(t) = \operatorname{sh}^2(t) - 2t\operatorname{ch}(t) + 2\operatorname{sh}(t)$.
Elle est dérivable, de dérivée égale à

$$\varphi' : t \mapsto 2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t) - \cancel{2\operatorname{ch}(t)} - 2t\operatorname{sh}(t) + \cancel{2\operatorname{ch}(t)} = 2\operatorname{sh}(t)\left(\operatorname{ch}(t) - t\right).$$

Par l'inégalité admise, on a donc φ' positive, de sorte que φ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.
Puisque par ailleurs, $\varphi(0) = 0$, on a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $2t\operatorname{ch}(t) - 2\operatorname{sh}(t) \leqslant \operatorname{sh}^2(t)$.
D'autre part, une étude de $\psi : t \mapsto t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t)$, de dérivée égale à $\psi' : t \mapsto t\operatorname{sh}(t) \geqslant 0$ et vérifiant $\psi(0) = 0$ prouve que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(x) \geqslant 0$.
Et donc comme annoncé, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $0 \leqslant t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2(t)$.
Mais puisque pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(t) - t\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}^2(t)}$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $-\frac{1}{2} \leqslant f'(t) \leqslant 0$.
Inégalité qui reste vraie pour $t = 0$ puisque $\widetilde{f}'(0) = 0$.
Enfin, puisque $\widetilde{f}$ est paire, sa dérivée est impaire, et donc pour tout $t \in \mathbf{R}_-$, $0 \leqslant \widetilde{f}'(t) \leqslant \frac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|\widetilde{f}'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Donc $\widetilde{f}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée bornée, par l'inégalité des accroissements finis elle est lipschitzienne, et même $\boxed{\tfrac{1}{2}\text{-lipschitzienne.}}$

Alternative sans calcul : au voisinage de $+\infty$, on a $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.
Et donc $\widetilde{f}'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-xe^x}{e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par imparité de $\widetilde{f}'$, on a également $\widetilde{f}'(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et puisque $\widetilde{f}'$ est continue sur $\mathbf{R}$, une application judicieuse du théorème des bornes atteintes prouve que $\widetilde{f}'$ est bornée.
Et donc l'inégalité des accroissements finis nous dit encore que $\widetilde{f}$ est lipschitzienne, sans nous donner toutefois la constante de Lipschitz qui convient.

> **Plus généralement**
> Une fonction $\mathscr{C}^1$, dont la dérivée possède des limites finies en $\pm\infty$ est lipschitzienne.

▶ Exercice 2 : commutant d'une matrice 2×2.

1. Il est clair que 0_2 commute avec A et donc est dans $\mathscr{C}(A)$.
Soient $M, N \in \mathscr{C}(A)$, et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A.$$

Et donc $\lambda M + N \in \mathscr{C}(A)$, si bien que $\boxed{\mathscr{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbf{C}).}$
Puisque $\dim \mathscr{M}_2(\mathbf{C}) = 2^2 = 4$, on a donc nécessairement $\dim \mathscr{C}(A) \leqslant 4$.
Par ailleurs, on a toujours $I_2 \in \mathscr{C}(A)$, si bien que $\mathscr{C}(A) \neq \{0_2\}$, et donc $\dim \mathscr{C}(A) \neq 0$, et donc $\boxed{1 \leqslant \dim \mathscr{C}(A) \leqslant 4.}$

2.a. Il est clair que $B = I_2$ convient.

2.b. Il s'agit donc de montrer qu'une matrice commute avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ si et seulement si elle dans $\mathrm{Vect}(I_2)$, c'est-à-dire si et seulement si elle est scalaire.
Un sens est évident puisqu'une matrice scalaire commute à toute matrice.
Inversement, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ qui commute à toutes les matrices.
Alors en particulier $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, soit encore $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc déjà $b = c = 0$, si bien que $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est diagonale.
Et alors A commute avec $E_{1,2}$, ce qui après calcul nous donne $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $a = d$.
Donc $A = aI_2$ est une matrice scalaire.

Ainsi, l'ensemble des matrices commutant à toutes les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ est l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(I_2) = \mathrm{Vect}(B)$.

2.c. Puisque $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, il est de dimension $4 = \dim \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ si et seulement si il est égal à $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ tout entier.
Donc si et seulement si A commute à toutes les matrices, ce qui par la question précédente est vrai $\boxed{\text{si et seulement si } A \text{ est scalaire.}}$

Rappel
Un sous-espace vectoriel de E est de même dimension que E si et seulement si il est égal à E tout entier.

3.a. Il est clair que $\mathbf{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel[1] de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, ce qui est moins évident c'est qu'il soit inclus dans $\mathscr{C}(A)$.
Soit donc $k \in \mathbf{N}$. Alors $A^k A = A^{k+1} = AA^k$, si bien que A^k commute avec A, et donc $A^k \in \mathscr{C}(A)$.
Donc $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ contenant tous les $A^k, k \in \mathbf{N}$. Mais $\mathbf{C}[A]$ est le plus petit tel sous-espace vectoriel, de sorte que $\mathbf{C}[A] \subset \mathscr{C}(A)$.
Et donc $\mathbf{C}[A] \subset \mathscr{C}(A)$, et donc $\boxed{\mathbf{C}[A] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}(A).}$

[1] Car c'est un Vect.

Rappel
Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant tous les $(e_i)_{i \in I}$, alors il contient $\mathrm{Vect}(e_i, i \in I)$.

3.b. Il est clair que $I_2 = A^0$ et $A = A^1$ sont dans $\mathbf{C}[A]$, et puisque $A \notin \mathrm{Vect}(I_2)$, alors la famille (I_2, A) est libre.
Prouvons donc qu'elle est génératrice de $\mathbf{C}[A]$.
Pour cela, nous allons prouver par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $A^k \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
Pour $k = 0$ et $k = 1$, c'est clair.
Soit donc $k \in \mathbf{N}$ tel que $A^k \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ tels que $A^k = \lambda I_2 + \mu A$. Alors

$$A^{k+1} = AA^k = \lambda A + \mu A^2 = \lambda A + \mu \left(\mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2\right) = (\lambda + \mu\,\mathrm{tr}(A))A - \mu \det(A) I_2 \in \mathrm{Vect}(I_2, A).$$

Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k \in \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
Donc $\mathrm{Vect}(I_2, A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ qui contient tous les $A^k, k \in \mathbf{N}$, et donc qui contient $\mathrm{Vect}(A^k, k \in \mathbf{N}) = \mathbf{C}[A]$.
Par double inclusion, on a donc $\mathbf{C}[A] = \mathrm{Vect}(I_2, A)$, qui est donc $\boxed{\text{de dimension 2.}}$

Intuition
L'hypothèse faite sur A nous dit déjà que (I_2, A) est libre. Puisqu'il s'agit de prouver que $\mathbf{C}[A]$ est de dimension 2, si c'est bien le cas, (I_2, A) sera libre et de cardinal égal à $\dim \mathbf{C}[A]$, donc sera une base de $\mathbf{C}[A]$.

4.a. Puisque la famille $(E_{1,1}, E_{1,2})$ est libre[2], alors $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ est de dimension 2.
Et alors par la formule de Grassmann,

$$\dim(\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})) = \underbrace{\dim \mathscr{C}(A) + \dim \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})}_{=3+2=5} - \dim\left(\mathscr{C}(A) + \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})\right).$$

Mais $\mathscr{C}(A) + \mathrm{Vect}(E_{1,1} + E_{1,2})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, sa dimension ne peut excéder 4, et donc $\dim \mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}) > 0$, si bien que $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}) \neq \{0_2\}$.

Le même argument prouve que $\mathscr{C}(A) \cap \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) \neq \{0_2\}$.

[2] C'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$.

4.b. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Soit donc $M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathscr{C}(A) \cap \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$.
On a donc $\lambda \neq 0$ **ou** $\mu \neq 0$. Et puisque $M \in \mathscr{C}(A)$, on a donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ soit encore } \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda c & \mu c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\lambda c = \mu c = 0$, et puisque l'un au moins des deux nombres λ, μ est non nul, $c = 0$.

Sur le même principe, à l'aide de $\mathscr{C}(A) \cap \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,1}) \neq \{0_2\}$, on prouve que $b = 0$, et donc que A est diagonale.

▶ $\boxed{\text{Si } a = d}$, alors A est scalaire, et donc la question 2 prouve que $\mathscr{C}(A)$ est de dimension 4, ce qui est absurde.
▶ $\boxed{\text{Si } a \neq d}$, soit alors $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Alors $M \in \mathscr{C}(A)$ si et seulement si

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} am_1 & am_2 \\ dm_3 & dm_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am_1 & dm_2 \\ am_3 & dm_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow am_2 = dm_2 am_3 = dm_3.$$

Et puisque $a \neq d$, c'est le cas si et seulement si $m_3 = m_4 = 0$.
Autrement dit, $\mathscr{C}(A)$ est l'ensemble des matrices diagonales, soit encore $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2})$ qui est de dimension 2.
Ce qui là encore contredit l'hypothèse $\dim \mathscr{C}(A) = 3$.
Ainsi, on n'a jamais $\dim \mathscr{C}(A) = 3$.

> **Plus généralement**
> Un exercice du TD de calcul matriciel prouve qu'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts ne commute qu'avec les matrices diagonales.

5. Par ce qui précède, on a donc $\dim \mathscr{C}(A) = 4$ si et seulement si $A \in \text{Vect}(I_2)$.
Et si $A \notin \text{Vect}(I_2)$, alors $\dim \mathscr{C}(A) \neq 3$, si bien que $\dim \mathscr{C}(A) \in \{1, 2\}$.
Or, $\mathbf{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(A)$, de dimension 2, si bien que $\dim \mathscr{C}(A) \geqslant 2$.
Donc nécessairement $\boxed{\dim \mathscr{C}(A) = 2, \text{ et on a notamment } \mathscr{C}(A) = \mathbf{C}[A].}$

6. Par la question 3, il est clair que si $B \in \mathbf{C}[A]$, alors $B \in \mathscr{C}(A)$, et donc $Ab = BA$. De même si $A \in \mathbf{C}[B]$.

Inversement, supposons que $AB = BA$, de sorte qu'on a à la fois $A \in \mathscr{C}(B)$ et $B \in \mathscr{C}(A)$.
▶ Si A n'est pas scalaire, alors $B \in \mathscr{C}(A) = \mathbf{C}[A]$.
▶ De même si B n'est pas scalaire, alors $A \in \mathbf{C}[B]$.
▶ Si $A = 0_2$, alors $A \in \mathbf{C}[B]$, et de même si $B = 0_2$.
▶ Si A et B sont toutes les deux scalaires et non nulles. Alors elles sont proportionnelles, et donc on a à la fois $A \in \mathbf{C}[B]$ et $B \in \mathbf{C}[A]$.
Dans tous les cas, on a bien $A \in \mathbf{C}[B]$ ou $B \in \mathbf{C}[A]$, de sorte que l'équivalence annoncée est bien justifiée.

▶ Problème : nombres de Bernoulli et formule de Faulhaber.

Partie I. Endomorphisme de dérivation discrète.

1. Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Delta(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X) = \lambda\left(P(X+1)-P(X)\right)+\left(Q(X+1)-Q(X)\right) = \lambda\Delta(P)+\Delta(Q).$$

Ainsi, Δ est linéaire. Et puisque pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme, $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}[X].}$

2. Si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors $\deg P(X+1) = \deg P \leqslant n$, donc $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) \in \mathbf{R}_n[X]$.
Et donc $\boxed{\mathbf{R}_n[X] \text{ est stable par } \Delta.}$

> **Rappel**
> Le degré de $P \circ Q$ est égal à $\deg P \times \deg Q$.

3. Pour $k \geqslant 1$, on a

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

En particulier, $\Delta(X^k)$ est un polynôme de degré $k-1$.
Et si $k=0$, alors $\Delta(X^0)=\Delta(1)=1-1=0$, donc $\deg\Delta(1)=-\infty$.

Rappel
Le degré d'un polynôme est le plus grand des entiers i tel que le coefficient de X^i soit **non nul.**

Soit $P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme de degré $d\geqslant 1$, de sorte que $a_d\neq 0$.
Alors, par linéarité de Δ, on a

$$\Delta(P)=\sum_{i=0}^{d} a_i\Delta(X^i)=a_d\Delta(X^d)+\sum_{i=0}^{d-1} a_i\Delta(X^i).$$

Mais $a_d\Delta(X^d)$ est de degré $d-1$, et $\sum_{i=0}^{d-1} a_i\Delta(X^i)$ est de degré inférieur ou égal à $d-2$, de sorte que $\Delta(P)$ est de degré $d-1$.
Enfin, si P est constant[3], alors $\Delta(P)=0$.

Et donc, pour tout $P\in\mathbf{R}[X]$, $\boxed{\deg\Delta(P)=\begin{cases}\deg(P)-1 & \text{si } \deg P\geqslant 1\\ -\infty & \text{sinon}\end{cases}}$

[3] C'est-à-dire de degré 0.

Alternative
Si $P(X+1)=P(X)$, alors

$$P(0)=P(1)=P(2)=\dots$$

Autrement dit, $P-P(0)$ s'annule en tous les entiers. Or, seul le polynôme nul possède une infinité de racines, et donc $P-P(0)=0$ donc $P=P(0)\in\mathbf{R}_0[X]$.

4. Soit $P\in\mathbf{R}_n[X]$. Alors $P\in\operatorname{Ker}\Delta_n \Leftrightarrow \Delta(P)=0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow \deg(\Delta(P))=-\infty$.
Par la question précédente, c'est le cas si et seulement si $\deg P<1$.
Et donc $\operatorname{Ker}\Delta_n=\{P\in\mathbf{R}_n[X]\mid \deg(P)<1\}=\mathbf{R}_0[X]$.
Puisque $\operatorname{Ker}\Delta_n\neq\{0_{\mathbf{R}[X]}\}$, $\boxed{\Delta_n \text{ n'est pas injectif.}}$
Or un endomorphisme d'un espace de dimension finie[4] est surjectif si et seulement si il est injectif, donc $\boxed{\Delta_n \text{ n'est pas surjectif.}}$

[4] Ce qui est le cas de $\mathbf{R}_n[X]$.

5. Puisque $\dim\mathbf{R}_0[X]=1$, par le théorème du rang, on a

$$\operatorname{rg}\Delta_n=\dim\mathbf{R}_n[X]-\dim\operatorname{Ker}\Delta_n=n+1-1=n.$$

D'autre part, nous avons déjà prouvé que pour $P\in\mathbf{R}_n[X]$, $\Delta_n(P)\in\mathbf{R}_{n-1}[X]$, de sorte que $\operatorname{Im}\Delta_n\subset\mathbf{R}_{n-1}[X]$. Or, $\dim\mathbf{R}_{n-1}[X]=n=\operatorname{rg}\Delta_n=\dim\operatorname{Im}\Delta_n$, et donc $\boxed{\operatorname{Im}\Delta_n=\mathbf{R}_{n-1}[X].}$

Inégalités
On utilise ici des inégalités plutôt que des égalités pour ne pas se retrouver avec des degrés négatifs. Mais si $\deg P\geqslant k$, l'inégalité ci-dessus est en fait une égalité.

6. Puisque $\deg\Delta(P)\leqslant\deg P-1$, une récurrence triviale prouve que pour tout $k\in\mathbf{N}$ et tout $P\in\mathbf{R}[X]$, $\deg\Delta^k(P)\leqslant\deg P-k$.
En particulier, pour $P\in\mathbf{R}_n[X]$, $\Delta^{n+1}(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n-(n+1)$, et donc est nul.
Ainsi, $\Delta_n^{n+1}=0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])}$, donc Δ_n est nilpotent, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $n+1$.
Par ailleurs $\Delta_n^n(X^n)$ est de degré 0, donc non nul, donc $\Delta_n^n\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])}$, de sorte que l'indice de nilpotence de Δ_n est au moins $n+1$. Et donc $\boxed{\text{est égal à } n+1.}$

En revanche, $\boxed{\Delta \text{ n'est pas nilpotent}}$ puisque pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, on a $\Delta^k(X^k)$ qui est non nul car de degré 0, donc $\Delta^k\neq 0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])}$.

7.a. L'application $P\mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}_n[X]$, clairement non nulle, et H_n en est le noyau, donc est un hyperplan[5] de $\mathbf{R}_n[X]$.
Et donc $\dim H_n=\dim\mathbf{R}_n[X]-1=\boxed{n.}$

[5] Et en particulier un sous-espace vectoriel.

7.b. Notons que nous savons déjà que Δ_n est à valeurs dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, donc il en est de même de $\Delta_{|H_n}$, qui est une restriction de Δ_n.
Les deux espaces H_n et $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ étant tous deux de dimension n, il suffit de prouver que $\Delta_{|H_n}$ est injective.
Mais $\operatorname{Ker}\Delta_{|H_n}=\left\{P\in H_n\mid\Delta(P)=0_{\mathbf{R}[X]}\right\}=\{P\in H_n\mid P\in\operatorname{Ker}\Delta\}=\operatorname{Ker}\Delta\cap H_n$, qui est réduit au polynôme nul.
Donc $\Delta_{|H_n}$ est donc par l'argument de dimension évoqué ci-dessus, réalise une bijection de H_n sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Restriction
Si vous restreignez une application linéaire f à un sev F de l'espace de départ, le noyau de la restriction sera

$$\operatorname{Ker} f_{|F}=\operatorname{Ker} f\cap F.$$

7.c. Déjà $H\cap\operatorname{Ker}\Delta=\{0_{\mathbf{R}[X]}\}$, donc $H_{|\Delta}$ est injectif.
Et par ailleurs, pour $Q\in\mathbf{R}[X]$, considérons un entier $n\in\mathbf{N}^*$ tel que $Q\in\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
Alors par la question précédente il existe un polynôme $P\in H_n\subset H$ tel que $\Delta(P)=Q$.
Et donc Q possède au moins un antécédent par $\Delta_{|H}$, de sorte que $\Delta_{|H}$ est surjective, et donc bijective.

8. Existence des polynômes de Faulhaber

8.a. Soit $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(n) = S_p(n) = Q(n)$.
Alors le polynôme $P - Q$ s'annule en tous les entiers naturels, et donc possède une infinité de racines, si bien qu'il est le polynôme nul. Et donc $P = Q$.
Ainsi, il existe au plus un tel polynôme P.

8.b. Par définition, F_p est donc un[6] polynôme de H tel que $\Delta(F_p) = (X+1)^p$.
Soit encore $F_p(X+1) - F_p(X) = (X+1)^p$.
Alors pour $n \in \mathbf{N}^*$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(F_p(k+1) - F_p(k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^p = \sum_{k=1}^{n} k^p = S_p(n).$$

Mais par ailleurs, la somme de gauche est télescopique, égale à $F_p(n) - F_p(0) = F_p(n)$ puisque $F_p \in H$ et donc $F_p(0) = 0$.
Le cas de $n = 0$ est peut-être à traiter à part, mais puisque $F_p \in H$, $F_P(0) = 0$ et $S_p(0) = 0$, de sorte qu'on a bien, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_p(n) = S_p(n)$.
Enfin, notons que $p = \deg((X+1)^p) = \deg(\Delta(F_p)) = \deg(F_p) - 1$, si bien que $\deg F_p = p+1$.

[6] C'est même l'**unique** polynôme ayant ces propriétés.

8.c. En vertu des formules classiques et rappelées dans l'énoncé pour $S_1(n), S_2(n)$ et $S_3(n)$, on a

$$\boxed{F_1 = \frac{X(X+1)}{2},\ F_2 = \frac{X(X+1)(2X+1)}{6} \text{ et } F_3 = F_1^2 = \frac{X^2(X+1)^2}{4}.}$$

Partie II. Nombres de Bernoulli

9. Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous savons que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^{n+1}\right)$, et donc

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{k!} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} x^k + o\left(x^n\right).$$

10. Notons tout de suite qu'il va falloir diviser numérateur et dénominateur par x, et donc il va falloir faire un DL_5 de $e^x - 1$.
On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{x}{e^x - 1} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^3 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^4 + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{120} + \frac{5}{72} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)x^4 + o\left(x^4\right) \\
&\boxed{\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o\left(x^4\right).}
\end{aligned}$$

Détails ?
Je vous épargne les calculs, mais il faut poser

$$u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}$$

et calculer successivement u^2, u^3 et u^4, par exemple avec un petit tableau.

11.a. Par quotient de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$, et donc en particulier y est continue.
Et on a $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, si bien que $\lim_{x\to 0} g(x) = 1 = g(0)$.
Donc $\boxed{g \text{ est continue en } 0, \text{ et donc sur } \mathbf{R}.}$

11.b. C'est une simple récurrence sur k.

Rédaction ✎
Bien entendu, vous ne pouvez pas vous contenter de le dire ainsi, et devez rédiger la récurrence !

11.c. Notons $\psi : x \mapsto e^x - 1$, de sorte que $g = \psi \times \varphi$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque ψ et φ sont toutes deux n fois dérivables, alors par la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(k)}(x) \varphi^{(n-k)}(x)$$

$$= (e^x - 1)\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^x \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}}$$

Pour $k \geqslant 1$, $\psi^{(k)} = \exp$.

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} e^x - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^{n-k} \frac{e^x}{x^{n+1-k}}$$

$$= \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}} \left(1 - e^{-x} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right)$$

k et $-k$ étant de même parité, $(-1)^k = (-1)^{-k}$.

$$\boxed{= \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k - e^{-x}\right).}$$

11.d. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a alors

$$e^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + o\left(x^{n+1}\right)$$

de sorte que

$$e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \underset{x\to 0}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Et donc $g^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \dfrac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi, $g^{(n)}$ possède une limite finie en 0.
Puisque ceci est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, et que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$, par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$, $\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$

Et puisque g ne s'annule pas et que $f = \frac{1}{g}$, alors $\boxed{f \text{ est également de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$

12. C'est tout simplement la formule de Taylor-Young à l'ordre n, qui s'applique puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} x^k + o(x^n).}$$

En reprenant le *DL* obtenu à la question 10 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$$

et par unicité de ce DL, il vient donc $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $\frac{B_2}{2} = \frac{1}{12}$, $\frac{B_3}{6} = 0$, $\frac{B_4}{24} = -\frac{1}{720} = -\frac{1}{6!}$.
Soit encore $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$.

Astuce
On notera que l'énoncé donnant B_4, c'était là une bonne occasion d'aller vérifier son DL de la question 10 (au moins pour le terme en x^4).

13. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Alors on a

$$\theta(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{2x + xe^x - x}{2(e^x - 1)} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

Et donc

$$\theta(-x) = -\frac{x}{2} \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = -\frac{x}{2} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \theta(x).$$

Donc θ est paire, donc θ' est impaire, θ'' est paire, et plus généralement, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction $\theta^{(k)}$ est de même parité que l'entier k.
En particulier, pour tout $k \geqslant 1$, par imparité de $\theta^{(2k+1)}$, on a $\theta^{(2k+1)}(0) = 0$.
Or $\theta^{(2k+1)} = f^{(2k+1)}$, et donc $B_{2k+1} = f^{(2k+1)}(0) = 0$.
On notera que ceci ne vaut plus pour $k = 0$, puisque $\theta' = f' + \frac{1}{2}$.
En revanche, on peut ainsi retrouver $B_1 = f'(0) = \theta'(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Alternative
Il aurait également été possible d'utiliser les DL, et de mentionner que tous les coefficients degré impair du DL de θ sont nuls, et que le coefficient de degré k du DL de θ est $\frac{B_k}{k!}$ si $k \neq 1$.

14.a. En reprenant les notations de la question 11.c, $f \times \psi = \mathrm{id}$, si bien que pour $n \geqslant 1$, en dérivant $n+1$ fois cette relation à l'aide de la formule de Leibniz,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \psi^{(n+1-k)} = 0.$$

⚠ Attention !
Puisque $n \geqslant 1$, $n + 1 \geqslant 2$, et donc la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de x est bien nulle, cette relation serait fausse pour $n = 0$.

Et en particulier, pour $x = 0$, en notant que $\psi(0) = 0$ et que pour $k \geqslant 1$, $\psi^{(k)}(0) = e^0 = 1$, il vient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.}$$

Une alternative : on aurait pu arriver à la même conclusion en calculant explicitement le $DL_{n+1}(0)$ de $f \times \psi$ et en utilisant l'unicité du DL.

On pourra noter que c'était là encore un moyen d'aller vérifier les valeurs obtenues à la question 12, et donc le DL de la question 10.

Remarque

Cette formule est le moyen le plus élémentaire de définir les nombres de Bernoulli, par récurrence.
Il suffit de dire que $B_0 = 1$ et que la formule ci-contre est vraie pour tout $n \geqslant 1$. Elle permet alors un calcul récursif des B_k, B_n étant défini en fonction de $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$.

14.b. La preuve peut se faire par récurrence forte sur $\mathbf{N}$.
Récurrence qui est très largement initialisée puisque nous avons déjà prouvé que B_0 à B_4 sont rationnels.
Soit donc $n \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, $B_p \in \mathbf{Q}$.
Alors en isolant le terme $k = n$ dans la relation de la question précédente, il vient

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \in \mathbf{Q}.$$

Et donc par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, B_n \in \mathbf{Q}.}$

Partie III. La formule de Faulhaber

15. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$e^{kx} \underset{x\to 0}{=} \sum_{j=0}^{p} \frac{(kx)^j}{j!} x^j + o\left(x^p\right).$$

Et donc par somme d'un nombre fini de développements limités,

$$h_n(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p} \frac{k^j}{j!} x^j + o\left(x^p\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{j=0}^{p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^j}{j!} x^j + o\left(x^p\right) \right) \underset{x\to 0}{=} n + \sum_{j=1}^{p} \frac{S_j(n-1)}{j!} x^j + o\left(x^p\right).$$

16. Pour $x \neq 0$, puisque $e^x \neq 1$, il vient[7]

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^x)^k = \frac{e^{nx}-1}{e^x - 1} = n \frac{e^{nx}-1}{nx} \frac{x}{e^x-1} = \boxed{ng(nx)f(x).}$$

[7] Somme des termes d'une suite géométrique.

S'il serait aisé de vérifier que cette formule reste valable en 0, remarquons plutôt que par continuité de h_n, g et f,

$$h_n(0) = \lim_{x\to 0} h_n(x) = \lim_{x\to 0} ng(nx)f(x) = ng(n \times 0) f(0).$$

17. Il s'agit d'utiliser l'unicité du développement limité d'ordre p de h_n.
D'une part, nous avons déjà dit que son coefficient de degré p est $\dfrac{S_p(n-1)}{p!}$.
D'autre part, par produit de DL, et puisque[8]

$$g(nx) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(nx)^k}{(k+1)!} + o(x^p) \text{ et } f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} x^k + o(x^p),$$

[8] Voir la question 9 pour le DL de g.

le coefficient de degré p du $DL_p(0)$ de $ng(nx)f(x)$ est

$$n \sum_{k=0}^{p} \frac{n^k}{(k+1)!} \frac{B_{p-k}}{(p-k)!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{B_{p-k}}{(k+1)!(p-k)!} n^{k+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} \frac{n^{p+1-k}}{(p+1-k)!}.$$

Donc comme annoncé,

$$\boxed{\frac{S_p(n-1)}{p!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{(p+1-k)!k!} n^{p+1-k}.}$$

18. On a donc

$$S_p(n-1) = \sum_{k=0}^{p} B_k \frac{p!}{k!(p+1-k)} n^{p+1-k} = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} B_k \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} n^{p+1-k} = \boxed{\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} B_k \binom{p+1}{k} n^{p+1-k}.}$$

Et en ajoutant le terme manquant n^p,

$$S_p(n) = S_p(n-1) + n^p = \frac{1}{p+1} B_0 n^{p+1} + \frac{1}{p+1} B_1 \binom{p+1}{1} n^p + n^p + \sum_{k=2}^{p} \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}.$$

Or $B_1 = -\frac{1}{2}$, de sorte que $\frac{1}{p+1} B_1 \binom{p+1}{1} n^p + n^p = \frac{1}{2} n^p = -B_1 n^p = -\frac{1}{p+1} B_1 \binom{p+1}{1}$.
De plus $B_0 = (-1)^0 B_0$ et pour tout $k \geqslant 2$, on a $(-1)^k B_k = B_k$ puisque lorsque k est impair, $B_k = 0$.
On en déduit donc que

$$\boxed{S_p(n) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}.}$$

Partie IV. Pour aller plus loin

19.a. Calculons le membre de droite

$$\begin{aligned}
S_k(n)S_p(n) + S_{k+p}(n) &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^k\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i^p\right) + \sum_{j=1}^{n} j^{k+p} \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^p j^k + \sum_{j=1}^{n} j^{k+p} \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^p j^k + \sum_{1\leqslant j< i\leqslant n} i^p j^k + \sum_{j=1}^{n} j^{k+p} \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^p j^k + \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} i^p j^k \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^k \sum_{i=1}^{j} i^p + \sum_{i=1}^{n} i^p \sum_{j=1}^{i} j^k \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^k S_p(j) + \sum_{i=1}^{n} i^p S_k(i) \\
&= \boxed{\sum_{j=1}^{n} \left[j^k S_p(j) + j^p S_k(j)\right].}
\end{aligned}$$

On coupe en deux la première somme.

19.b. Il s'agit d'utiliser la formule établie à la partie III pour l'expression de S_p :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} j^k S_p(j) &= \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{n} j^k \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p+1}{i} B_i j^{p+1-i} \\
&= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p+1}{i} B_i \sum_{j=1}^{n} j^{p+1+k-i} \\
&= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p+1}{i} B_i S_{p+1+k-i}(n) \\
&= \frac{1}{p+1} S_{k+p+1}(n) + \frac{1}{2} S_{p+k}(n) + \frac{1}{p+1}\sum_{i=2}^{n} (-1)^i \binom{p+1}{i} B_i S_{p+k+1-i}(n).
\end{aligned}$$

Permutation des deux sommes.

Et de même, en échangeant les rôles de p et k,

$$\sum_{j=1}^{n} j^p S_k(j) = \frac{1}{k+1} S_{k+p+1}(n) + \frac{1}{2} S_{p+k}(n) + \frac{1}{k+1}\sum_{i=2}^{k} (-1)^i \binom{k+1}{i} B_i S_{k+p+i-1}(n).$$

Et donc en utilisant la question précédente, il vient

$$\begin{aligned} S_k(n)S_p(n) &= \sum_{j=1}^{n}\left[j^k S_p(j) + j^p S_k(j)\right] - S_{k+p}(n) \\ &= \frac{1}{k+1}\left(S_{p+k+1}(n) + \sum_{i=2}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}B_i S_{k+p+1-i}(n)\right) \\ &+ \frac{1}{p+1}\left(S_{p+k+1}(n) + \sum_{i=2}^{p}(-1)^i\binom{p+1}{i}B_i S_{k+p+1-i}(n)\right). \end{aligned}$$

Les termes en $S_{p+k}(n)$ s'annulent.

On pourra noter que pour $k = p = 1$, cette formule nous redonne $S_1(n)^2 = S_3(n)$.

19.c. Nous allons procéder par récurrence forte sur p et prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme G_{kp+1} tel que $F_{2k+1} = G_{2k+1}(X(X+1))$.
Pour $k = 0$, on a $F_1 = \dfrac{X(X+1)}{2}$, donc $G_1 = \frac{X}{2}$ convient.
Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $h \in [\![0,k]\!]$, il existe un polynôme G_{2h+1} tel que $F_{2h+1} = G_{2h+1}(X(X+1))$.
Utilisons la formule précédente avec $p = 1$:

$$S_{2k+1}(n)S_1(n) = \frac{1}{2k+2}S_{2k+3}(n) + \frac{1}{2k+2}\sum_{i=2}^{2k+1}(-1)^i\binom{2k+2}{i}B_i S_{2k+3-i}(n) + \frac{1}{2}S_{2k+3}(n).$$

Et isolons alors $S_{2k+3}(n)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k+2}\right)S_{2k+3}(n) &= S_{2k+1}(n)S_1(n) - \frac{1}{2k+2}\sum_{i=2}^{2k+2}(-1)^i\binom{2k+2}{i}B_i S_{2k+3-i}(n) \\ &= S_{2k+1}(n)S_1(n) - \frac{1}{2k+2}\sum_{i=1}^{k+1}\binom{2k+2}{2i}B_{2i}S_{2k+3-2i}(n) \end{aligned}$$

Détails
Les B_i sont nuls pour $i \geqslant 2$ impair.

On en déduit donc que

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k+2}\right)F_{2k+3} = F_{2k+1}F_1 - \frac{1}{2k+2}\sum_{i=1}^{k+1}\binom{2k+2}{2i}B_{2i}F_{2k+3-2i}.$$

Et puisque par hypothèse de récurrence, F_{2k+1}, F_1 et tous les $F_{2k+3-2i}$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$ sont des polynômes en $X(X+1)$, il en est de même F_{2k+3}.
Et donc par le principe de récurrence forte, tous les F_p, p impair sont des polynômes en $X(X+1)$.

Et si k pair ?
En adaptant un peu la preuve ci-contre, on peut aussi prouver, en notant que $F_2 = \frac{X(X+1)(2X+1)}{6}$, que pour k pair, on peut toujours écrire F_k comme le produit de $2X+1$ par un polynôme en $X(X+1)$.

20. Signe des B_{2p}

20.a. Commençons par vérifier l'identité annoncée :

$$\frac{x}{e^x-1} - \frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{x(e^x+1)-2x}{e^{2x}-1} = \frac{xe^x - x}{e^{2x}-1} = \frac{x(e^x-1)}{(e^x+1)(e^x-1)} = \frac{x}{e^x+1}.$$

Et donc en utilisant le $DL_p(0)$ de f

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x+1} = f(x) - f(2x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p}\frac{B_k}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{p}\frac{B_k}{k!}(2x)^k + o(x^p) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p}\left(1-2^k\right)\frac{B_k}{k!}x^k + o(x^p). \end{aligned}$$

20.b. En multiplicant par $\frac{x}{e^x-1}$, le membre de gauche devient

$$\frac{x^2}{e^{2x}-1}\frac{x}{2}\frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{x}{2}f(2x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{B_k}{k!}2^k x^k + o(x^{p-1})\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p-1}\frac{2^k B_k}{2k!}x^{k+1} + o(x^p) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{p}\frac{2^{k-1}B_{k-1}}{2(k-1)!}x^k + o(x^p).$$

Et par ailleurs, par produit de DL le coefficient de degré p de cette même expression est celui du produit $f(x) \times \dfrac{x}{e^x+1}$, à savoir

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1-2^k}{k!} B_k \frac{B_{p-k}}{(p-k)!}.$$

En d'autres termes, pour tout $p \geqslant 1$,

$$\frac{2^{p-1} B_{p-1}}{2(p-1)!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1-2^k}{k!(p-k)!} B_k B_{p-k}.$$

En particulier, si $p \geqslant 2$ alors $B_{2p-1} = 0$, donc le membre de gauche de l'égalité ci-dessus[9] est nul. Il reste donc

[9] Avec $2p$ à la place de p.

$$0 = \sum_{k=0}^{2p} \frac{1-2^k}{k!(2p-k)!} B_k B_{2p-k}.$$

Dans la somme ci-dessus, le terme avec $k = 0$ est nul (car $2^0 = 1$), celui avec $k = 2p$ est $\dfrac{1-4^p}{(2p)!} B_{2p}$.
Et pour tout $k \in [\![1, 2p-1]\!]$ impair, k et $2p-k$ sont impairs, et l'un au moins des deux est plus grand que 3 de sorte que $B_k B_{2p-k}$ est toujours nul.
Il reste donc

$$\frac{4^p - 1}{(2p)!} B_{2p} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p-2} \frac{1-2^k}{(k)!(2p-k)!} B_k B_{2p-k} = \boxed{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1-4^k}{(2k)!(2p-2k)!} B_{2k} B_{2p-2k}.}$$

20.c. Nous allons procéder par récurrence forte sur $p \geqslant 1$, l'idée étant que la formule que nous venons de mettre en évidence exprime B_{2p} en fonction des B_{2j}, $1 \leqslant j < p$.
La récurrence est initialisée puisque $B_2 = B_{2\times 1}$ est strictement positif.
Soit alors $p \geqslant 1$ tel que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $(-1)^{k-1} B_{2k} > 0$.
Alors

$$\begin{aligned}(-1)^{p-1} B_{2p} &= \frac{(2p)!}{4^p - 1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1-4^k}{(2k)!(2p-2k)!} (-1)^{p-1} B_{2k} B_{2p-2k} \\ &= \frac{(2p)!}{4^p - 1} \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\frac{4^k - 1}{(2k)!(2p-2k)!}}_{>0} \underbrace{(-1)^{k-1} B_{2k}}_{>0} \underbrace{(-1)^{p-k-1} B_{2(p-k)}}_{>0} > 0.\end{aligned}$$

Et donc par le principe de récurrence, pour tout $p \geqslant 1$, $(-1)^{p-1} B_{2p} > 0$.
Ceci prouve donc qu'on a une alternance de signe dans les B_{2k}, mais également qu'ils ne sont jamais nuls.
Commentaires *: en calculant récursivement les B_k on peut prouver que les premiers nombres de Bernoulli pairs sont*

$$B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{16} = -\frac{3617}{510}, \dots$$

Le difficile théorème de VON STAUDT-CLAUSEN décrit complètement le dénominateur de B_{2n} : c'est le produit des premiers p tels que $p - 1 \mid 2n$.

Par ailleurs, ces nombres de Bernoulli apparaissent dans le développement limité de tan *et de* th *:*

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k B_{2k} \frac{4^k(4^k-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right) \quad et \quad \operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} B_{2k} \frac{4^k(4^k-1)}{(2k)!} x^{2k-1} + o\left(x^{2n}\right).$$

Enfin les nombres de Bernoulli sont reliés à une fonction que nous définirons en fin d'année, la fonction ζ de RIEMANN. Plus spécifiquement, les nombres de Bernoulli apparaissent dans l'expression des valeurs de ζ en les entiers pairs : pour tout $p \geqslant 1$,

$$\zeta(2p) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}} = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p-1} B_{2p}}{(2p)!} \pi^{2p}.$$